Sur les fonctions absolument monotones

PC*2

30 janvier 2001

Une fonction absolument monotone sur un intervalle $I =]-R, R[$, est une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ qui vérifie :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbf{N},\ f^{(n)}(x) \geq 0}$$

On se propose de prouver qu'une telle fonction est développable en série de Taylor sur I.

Proposition 1. *Soit $x \in [0, R[$ et $t \in [0, x]$ alors la série de terme général*

$$\boxed{u_n(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)}$$

est à termes positifs, convergente et sa somme est majorée par $f'(x)$.

Démonstration. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à f' sur $[t, x]$ à l'ordre N soit :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \int_t^x \frac{(x-s)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+2)}(s)\,\mathrm{d}s$$

or le reste $\int_t^x \frac{(x-s)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+2)}(s)\,\mathrm{d}s \geq 0$ donc la somme partielle de rang N de la série est majorée par $f'(x)$ et le résultat suit. □

Proposition 2. *Pour x in $[0, R[$ la série de Taylor de f converge au point x et a pour somme $f(x)$.*

Démonstration. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f à l'ordre N entre 0 et x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après la proposition précédente on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (u_N) sur le segment $[0, x]$ avec la domination $0 \leq u_N(t) \leq f'(x)$. Le reste intégral tend donc vers 0 qunad $N \to \infty$ et le résultat voulu en découle. $\square$

Théorème 1. *Pour x in $]-R, R[$ la série de Taylor de f converge au point x et a pour somme $f(x)$.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $-R < x < 0$. On observe que, du fait de la croissance et de la positivité de $f^{(n)}$, on a, pour un tel x :

$$\boxed{0 \leq f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(|x|) \ \text{ donc } \ |f^{(n)}(x)| \leq f^{(n)}(|x|)}$$

Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f à l'ordre n entre 0 et x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(xt)\, \mathrm{d}t$$

Or :

$$\left| x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(xt)\, \mathrm{d}t \right| \leq |x|^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(|x|t)\, \mathrm{d}t$$

et le reste majorant tend vers 0 d'après la proposition précédente appliquée à $|x|$. Le résultat voulu en découle. $\square$

À Fabian Gallusser, socle inaltérable de la PC*2, qui supporte stoïquement la pesanteur de mon esprit