Fonctions de plusieurs variables

15 mars 2001

1. (Centrale 99) Soit f la fonction continue de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall(x,y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R},\ f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

   (a) f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbf{R}^2$?
   (b) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?
   (c) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

2. Pour $x \neq y$, on pose $f(x,y) = \frac{\operatorname{sh} x - \sin y}{e^x - e^y}$. Etudier le comportement de f au voisinage de $(0,0)$. *(Considérer (x_n, y_n) avec $x_n = n^{-1/2} + n^{-3}$ et $y_n = n^{-1/2}$)*

3. (Cen 99 et Mines 2000) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On pose

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

   Etudier la continuité de ϕ. Que dire de la régularité de ϕ si f est de classe $\mathcal{C}^2$?

4. Montrer que $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

5. (1997) Soit $p > 0$ un entier. On définit une application f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par $f(0,0) = 0$ et sinon :

$$f(x,y) = (x+y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   f est-elle continue ? Admet-elle des dérivées partielles ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

6. Etude au voisinage de $(0,0)$ de :

$$f(x,y) = \frac{x \sin x + y \sin y}{x^2+y^2}$$

7. (Cen 99) Domaine de définition D de :

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2} \ ?$$

   f est-elle continue sur D ? Sur quel ouvert est-elle $\mathcal{C}^1$?

8. (Cen 98) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

   Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ et admet des dérivées secondes partielles croisées distinctes en $(0,0)$.

9. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction :

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4} \text{ si } x \neq 0$$

   $f(0,y) = 0$, est elle continue sur $\mathbf{R}^2$. *(poser $x = r\cos\theta$, $y^2 = r \sin\theta$)*

10. On pose :

$$f(x,y) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$$

   Etudier la définition et la continuité de f. Sur quel ouvert Ω f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Calculer Df et interpréter le résultat.

11. Montrer que $(x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{\operatorname{sh} y}$ convenablement prolongée en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$.

12. Soit $f \in \mathcal{C}^2(]-1,1[,\mathbf{R})$. On pose :

$$g(x,y) = f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

   Trouver f pour que $\Delta g = 0$.

13. (1997) Déterminer les applications homogènes f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U =]0, +\infty[\times \mathbf{R}$ telles que
$$\Delta f = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$
On utilisera les coordonnées polaires.
14. (1997) Intégrer :
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
sur des ouverts convenables. *(poser $u = x$ et $v = y/x$)*
15. (Mines 99) Intégrer :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$
sur un ouvert convenable. *(poser $u = x + y$ et $v = x - y$)*
16. Intégrer :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
17. Intégrer :
$$z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 = 0$$
18. Trouver les surfaces $(S) : z = f(x, y)$ telle que l'aire du triangle ONP soit constante où N est l'intersection de la normale à (S) en $M(x, y, f(x, y))$ et P la projection de M sur le plan xOy.
19. (1996) Soit ϕ une application continue sur $\mathbf{R}$; on considère l'équation :
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$
Montrer qu'elle admet des solutions de la forme $z = f(y/x)$. Etudier le cas où $\phi(t) = t$.
20. (CCP 1999) Soit $f \in \mathcal{C}^2(]-1, 1[, \mathbf{R})$. On lui associe ϕ définie par $\phi(x, y) = f(y/x)$.
Dessiner le domaine de définition de ϕ et trouver f pour que ϕ vérifie :
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$$

21. (ENS 99) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Que vaut
$$\iint_{D(O,R)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{dy}$$
en coordonnées polaires ?
On suppose que $\Delta f = 0$. Montrer que la fonction g définie par :
$$g(\rho) = \int_0^{2\pi} f^*(\rho, \theta)\,\mathrm{d}\theta$$
est égale à une constante que l'on déterminera.
Sous ces mêmes hypothèses, prouver que :
$$\iint_{D(O,R)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{dy} = \pi R^2 f(0, 0)$$
Que dire de f si $f(0, 0)$ est le maximum de f ?
22. (1996) Jacobienne de $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ considérée comme application de $\mathbf{R}^2 - (0, 0)$ dans $\mathbf{R}^2$.
23. (1996) Montrer que toute solution de l'équation :
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(x^2 + y^2)$$
est bornée sur $\mathbf{R}^2$.
24. Montrer que la fonction f définie sur $U =]0, +\infty[^2$ par :
$$f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$
se prolonge par continuité à $\bar{U}$. Calculer $\sup_U f(x, y)$.
25. (1997) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|f'(t)| \leq k < 1$. Soit $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par :
$$\phi(x, y) = (y + f(x), x + f(y))$$
Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur lui même.

26. (Cen 98) Soit $f : x \mapsto y$ avec :
$$\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
Domaine de définition. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$? Graphe et équivalent en $-\infty$.
27. (Cen 98) Extréma locaux de f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$$
28. (1997) Extréma de $x^2 + 2y^2 - x$ sur le disque fermé unité.
29. (Mines 2000) Extréma de $(x,y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x$.
30. (Mines 2000) Soit $a > 0$. Montrer que l'application f de $]0,+\infty[^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$(x,y) \mapsto \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}$$
admet un minimum global et le calculer. Même question avec l'application f de $]0,+\infty[^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$(x,y) \mapsto \frac{a}{xy} + x^2 + y^2$$
31. (Mines 2000) Points critiques et extréma de
$$x^3 + 3xy^2 - 12y - 15x$$
32. Extrema de $x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ dans le disque fermé de centre O et de rayon 2.
33. (Mines 2000) Extrema de $2xy^2 + \ln(4+y^2)$ sur $\mathbf{R}^2$ puis sur la bande $0 \le x \le 1$.
34. (1998) $f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$ admet des extrema globaux sur $\mathbf{R}^2$. Les calculer. sont-ils locaux stricts ?
35. (1996) Extréma locaux de $f : (x,y) \mapsto x^3y^2(1-x-y)$.
36. (Centrale 1999) Soit f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :
$$f(x,y) = x^2y^3(x+2y-2)$$
Donner les maxima locaux de f.
f possède-t-elle des maxima sur :
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;/\; x^2y^3 < 1\}$$

37. (1996) On pose, pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$:
$$f(x,y) = \begin{cases} y(x-y) & \text{si } x \ge y \\ x(y-x) & \text{sinon} \end{cases}$$
f est-t-elle de classe $\mathcal{C}^n$ $(n = 0,1)$? Maximum de f sur $[0,1]^2$.
38. (Mines 2000) extréma sur la boule unité fermée de $\mathbf{R}^3$ de :
$$(x,y,z) \mapsto x^3 - x^2 - y^2 - y - z^2 + 1$$
39. (Cen 2000) extréma locaux de $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} - 2x^2 - 3$ sur le disque fermé de centre O et de rayon 2.
40. (Cen 99) Soit ABC un triangle d'un plan euclidien d'aire $S > 0$, dont on note a, b, c les longueurs des côtés. Soit M un point appartenant à l'intérieur T du triangle. On note x, y, z les disatnces du point M respectivement aux côtés BC, CA, AB.
Exprimer S à l'aide de x, y, z, a, b, c. En déduire :
$$\max_{M \in T} xyz$$
41. (X 1997) Soit U l'ouvert de $\mathbf{R}^n$ défini par :
$$\forall i,j \in [|1,n|], i \ne j \Rightarrow x_i \ne x_j$$
Pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$, on pose :
$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{1 \le i < j \le n} \ln|x_i - x_j|$$
   (a) Montrer que f admet un minimum sur U.
   (b) Soit $a = (a_1,\dots,a_n)$ un point de U où ce minimum est atteint. On pose $H = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$. Prouver :
$$H"(a_k) - 4a_kH'(a_k) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \le k \le n$$
   (c) Trouver une équation différentielle satisfaite par H. Calculer H.
   (d) Calculer $\min_U f$ pour $n = 2,3$.

42. (1996) Maximum du volume d'un parallélépipède rectangle dont la surface totale et le périmètre sont donnés.
43. Montrer que l'application $\theta : (x,y) \mapsto (xy, y)$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $U = \mathbf{R}\times]0,+\infty[$ sur lui même. Si $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbf{R})$, on pose $z = f \circ \theta^{-1}$. Exprimer $\frac{\partial z}{\partial v}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
44. Soit U l'ensemble des suites $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ strictement croissantes de n éléments de $\mathbf{R}^n$. Montrer que U est ouvert et que l'application qui à $x \in U$ associe ses fonctions symétriques élémentaires est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de U sur un ouvert $V \subset \mathbf{R}^n$. Conclusion ?
45. (1996) Soit ϕ l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$\phi(x,y) = (x+y, xy)$$

    (a) Matrice jacobienne de ϕ ?
    (b) Montrer que $\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ |y| < |x|\}$ est un ouvert et que ϕ induit un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de Δ sur $\phi(\Delta)$.
46. Soit U un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction continue de $\bar{D}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ dans U.
    (a) Prouver que, si $\Delta f > 0$ dans U, alors f atteint son maximum sur $\partial U = \bar{U} - U$.
    (b) Prouver que le résultat précédent est encore vrai si f est harmonique dans U *(considérer $g(x,y) = f(x,y) + \epsilon(x^2+y^2)$).*
47. Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$$

    Extrema sur D de $f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$. En déduire le minimum sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ de :

$$g(a,b) = \int_{-1}^{1} |t^2 + at + b|\, dt$$

48. (X 1999) Soit

$$A_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n,\ \forall i > 0, x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}$$

    On définit une application f de A_n dans $\mathbf{R}$ en posant :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{0\leq i,j\leq n} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \text{ avec } x_0 = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

15 mars 2001

    Montrer que f admet un maximum λ atteint en un point $(y_1,\ldots,y_n)$ et que, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{i+j+1} = \lambda y_i$$

49. Maximum du périmètre d'un triangle inscrit dans un cercle.
50. Maximum du volume d'un téraèdre inscrit dans une sphère.
51. Minimum de la surface latérale d'un tétraèdre $MABC$ dont la base ABC est un triangle donné, et que M appartienne à un plan parallèle au plan de ce triangle.
52. (1996) ABC est un triangle dont les trois angles sont aigus. Soit $X \in [A,B]$, $Y \in [B,C]$, $Z \in [C,A]$. Montrer l'existence de (X,Y,Z) tel que le périmètre du triangle XYZ soit minimal. la caractériser.
53. (1996) Calculer, pour $x \geq 0$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}$$

54. (1996) $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est définie par :

$$(x,y) \mapsto (x^2 - y^2 + 2ax, 2ax - 2ay)$$

    (a) Jacobienne $J(x,y)$?
    (b) Ensemble Γ des zéros de $J(x,y)$?
    (c) Image de Γ par F ?
    (d) Image par $J(x,y)$ d'un vecteur tangent en (x,y) à Γ ?
55. Soit (C) l'intersection des deux surfaces d'équations :

$$x^4 - y^2 + zx = 1 \text{ et } 2x + y + z = 4$$

    Trouver le rayon de courbure de (C) au point $A(1,1,1)$.
56. Rayon de courbure au point d'abscisse x à la conique :

$$y^2 = 2px + qx^2 \text{ avec } p > 0$$

57. Montrer que, sous des hypothèses convenables la relation :

$$f(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$$

définit z comme fonction $\mathcal{C}^2$ de (x, y) et que :

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

58. (Cen 98) Donner l'allure de la courbe :

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$$

au voisinage de $(0, 1)$.

59. On note : K l'ensemble des suites croissantes $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ de $n + 2$ éléments de $[-1, 1]$. Etudier le maximum sur K du déterminant de Vandermonde des x_i.

60. Montrer que les relations :

$$x = \cos u \operatorname{ch} v \text{ et } y = \sin u \operatorname{sh} v$$

déterminent deux applications $u(x, y)$ et $v(x, y)$ $\mathcal{C}^\infty$ de

$$\Omega = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*) \cup (]1, +\infty[\times \{0\})$$

dans $]-\pi, \pi[\times]0, +\infty[$ *(utiliser la définition bifocale de l'ellipse)*. Montrer que u et v sont harmoniques.

61. Soit f une fonction de clase $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(x_0, y_0) = 0$ et :

$$\forall (x, y),\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| < \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|$$

Montrer l'existence de $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout x.