GÉOMÉTRIE

10 décembre 2002

Le plan *(resp l'espace)* euclidien est rapporté à un repère orthonormé.

1. (CCP 98) Étudier, lorsque t est au voisinage de 0, la courbe :

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t - 1 - t - \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{3} \\ y = \mathrm{e}^{t^2} - t^2 \end{cases}$$

2. (CCP 2000) Même question que le précédent avec :

$$\begin{cases} x = \alpha \cos t - t^3 \\ y = \beta \sin t - \dfrac{t}{6} + t^2 \end{cases}$$

3. (CCP 2001) Étude et tracé de la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t-1} \end{cases}$$

4. (CCP 98) Tracer la courbe

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

5. (CCP 2000) Tracer la courbe :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t + 1 \\ y = 2 \sin t + \sin 2t \end{cases}$$

et calculer sa longueur.

6. (Cen 2000 et 2001) On considère la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t}{(t-1)(t+2)} \end{cases}$$

Points doubles, asymptotes ?
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de paramètres t_1, t_2, t_3 soient alignés. Points d'inflexion ?

7. (Cen 2002) Dans l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé on considère la courbe (C) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^3 \\ z = t^7 \end{cases}$$

   (a) Étudier les projections de (C) sur les plans de coordonnées.
   (b) Condition sur quatre paramètres distincts $(t_i)_{1 \leq i \leq 4}$ pour que les points $M(t_i)$ soient coplanaires.

8. (TPE 98) Étudier la courbe :

$$\begin{cases} x = -a \displaystyle\int_0^t \mathrm{th}^2\, u \,\mathrm{d}u \\ y = a \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{sh}\, u}{\mathrm{ch}^2\, u} \,\mathrm{d}u \end{cases}$$

Déterminer une abscisse curviligne sur cette courbe.

9. (CCP 98) Étudier les asymptotes de :

$$\rho = \frac{\theta}{\theta - 1}$$

10. (TPE 2000) Étudier la courbe :

$$\rho = \frac{1}{\sin 2\,\theta}$$

11. (TPE 2001) Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \sin(2\,\theta)$.
12. (X 1996) Étudier la courbe, définie en coordonnées polaires, par :

$$\rho(\theta) = \frac{1 + 2\cos\theta}{1 + 2\sin\theta}$$

13. (Mines 1998) Étudier la courbe, définie en coordonnées polaires, par :

$$\rho(\theta) = \cos\theta + \cos 2\theta$$

14. (Centrale 99) Tracé et points doubles de :

$$\rho = \frac{\theta}{\pi - \theta}$$

15. (Centrale 98) Donner l'allure de la courbe :

$$\rho = \theta + \cos\theta$$

16. (Mines 2001) Tracer l'allure de la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \frac{1}{4 + \cos\theta}$$

17. (Centrale 2002)-
    (a) Tracer la courbe (C) d'équation polaire :

    $$\rho = a(1 + \sin\theta) \qquad a > 0$$

    (b) Soit M un point de (C) ; montrer l'existence de deux autres points M_1 et M_2 de (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la tangente en M.
    (c) Lieu du milieu de M_1M_2 lorsque M varie sur (C).
    (d) Lieu du symétrique de O par rapport à une tangente variable à (C).

18. (Centrale 2002) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont une équation en repère orthonormé est :

    $$x^3 + y^3 - 3\,a\,xy = 0 \qquad a > 0$$

    (a) $(\mathcal{C})$ admet-elle un axe de symétrie ?
    (b) Paramétrer $(\mathcal{C})$ en la coupant par la droite d'équation $y = tx$. Étudier et tracer $(\mathcal{C})$.
    (c) Conditions sur les paramètres de trois points distincts de $(\mathcal{C})$ pour qu'ils soient alignés.
    (d) Montrer que la tangente en un point de $(\mathcal{C})$ recoupe généralement $(\mathcal{C})$ en un point. Prouver alors qu'à trois points alignés correspondent trois points alignés.

19. (Centrale 2001) Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé $(\mathcal{R}) = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ le repère local associé à l'angle polaire $\theta \in \mathbf{R}$. On considère la courbe Γ dont une équation polaire dans $(\mathcal{R})$ est :

    $$x\,(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = 0$$

    (a) Tracer Γ en passant en polaires.
    (b) Soit $(\mathcal{D})$ la droite affine $O + \mathbf{R}\,\overrightarrow{v(\theta)}$ et $(\mathcal{N})$ la normale à Γ en un de ses points M. On pose $N = (\mathcal{D}) \cap (\mathcal{N})$. Donner l'équation de MN dans le repère $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ et déterminer ON.
    (c) Les tangentes au point double O coupent l'asymptote de Γ en A et B. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABO. Si M est un point de Γ, la droite (OM) coupe l'asymptote en Q et le cercle en P. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OM}$. En déduire un procédé simple pour la construction de Γ.

20. (CCP 97, Cen 2000 et 2001) Étudier la courbe (C) :

$$x = 3t^2 \quad y = 2t^3$$

Axes de symétrie ? Points réguliers ? Trouver le lieu des points M d'où l'on peut mener deux tangentes à (C) perpendiculaires entre elles. Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à (C).

21. (Cen 2000 et 2001) Montrer qu'un triangle dont le centre de gravité est confondu avec le centre du cercle circonscrit est équilatéral. Soient P et Q deux points d'une hyperbole équilatère symétriques par rapport à son centre O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe l'hyperbole en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

22. (Cen 99) Soit ABC un triangle équilatéral du plan affine euclidien orienté. On s'intéresse à l'ensemble (Γ) des points du plan tels que $MA\,MB\,MC = R^3$ où $R > 0$.
   (a) Montrer qu'on peut se limiter au car $R = 1$.
   (b) En choisissant un repère convenable, montrer que (Γ) est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z^3 - 1| = 1$.
   (c) Montrer qu'une équation polaire de (Γ) est :

$$\rho^3 = 2\cos 3\theta$$

   (d) Étudier et tracer (Γ).

23. (Cen 2002) Dans un plan affine euclidien on considère un triangle OAB. Une droite variable (D) pivote autour de O et l'on note A' et B' les projetés orthogonaux de A et B sur (D). Écrire l'équation du cercle de diamètre $A'B'$. À quelle condition sur le triangle ce cercle passe-t-il par un point fixe ?

24. (Centrale 99) Déterminer les tangentes communes à :

$$y^2 = 2px, \quad \text{et} \quad x^2 = 2py$$

25. (Centrale 2001) On rappelle qu'une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales.
   (a) Que vaut l'excentricité d'une telle hyperbole ?

   (b) On considère une droite $(\mathcal{D})$ du plan, $A \notin (\mathcal{D})$ et $(\mathcal{H})$ une hyperbole équilatère passant par A et dont $(\mathcal{D})$ est une asymptote.
      i. Lieu des foyers de $(\mathcal{H})$?
      ii. Lieu des centres de $(\mathcal{H})$?
      iii. Lieu des sommets de $(\mathcal{H})$?

26. (Centrale 2002) Le Même que le précédent en remplaçant "asymptote" par "directrice".

27. (CCP 2001) Calculer le centre et le rayon du cercle de l'espace affine euclidien défini par :

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

28. (Centrale 99) Dans un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé, on se donne les points $A(0, 1, 1)$ et $B(0, 0, 1)$. Soit P un point qui décrit le cercle de centre O et de rayon 1 dans le plan xOy. Donner les coordonnées de M, projection orthogonale de A sur la droite BP et décrire la courbe décrite par M en la projetant sur des plans convenables.

29. (Centrale 99) Que dire des tangentes à l'image d'un arc $\mathcal{C}^1$, tracé dans un espace affine de dimension 3, par une transformation affine d'icelui ?

30. (1996) Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon a, A un point fixe de $(\mathcal{C})$ et M un point variable de $(\mathcal{C})$. Soit (Δ) la tangente à $(\mathcal{C})$ en A et I le point d'intersection de (Δ) et de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.
   (a) Déterminer une équation polaire du lieu (Γ) du symétrique J de I par rapport à la droite OM.
   (b) Tracer (Γ).
   (c) Calculer son aire.
   (d) Calculer son rayon de courbure en A

31. (1996) Soient :

$$\mathcal{D} \quad : \quad x + y - a = 0 \qquad (1)$$
$$\mathcal{C}_\lambda \quad : \quad x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0 \qquad (2)$$

Quel est le lieu (Γ) des points M tels que le point P, intersection de la parallèle à Ox menée de M et du cercle $\mathcal{C}_\lambda$ auquel M appartient soit sur $\mathcal{D}$?

32. (CCP 2000) Dans un espace affine $\mathcal{E}$, on considère trois quadruplets de points alignés :

$$OA_1A_2A_3 \quad OB_1B_2B_3 \qquad OC_1C_2C_3$$

On suppose, de plus, que les trois plans $A_iB_iC_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ sont parallèles entre eux. On pose :

$$I = B_1C_2 \cap B_2C_1 \qquad J = A_1C_2 \cap A_2C_1 \qquad K = A_1B_2 \cap A_2B_1$$

Montrer que les droites IA_3, JB_3, KC_3 sont concourantes ou parallèles.

33. (1996) Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites (D_1) et (D_2) de l'espace définies par :

$$(D_1)\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z+1 & = & 0 \\ x-y-1 & = & 0 \end{array}\right. \qquad (D_2)\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+3z+1 & = & 0 \\ 2x-y-z-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

34. (Mines 2002) L'espace est rapporté à un repère orthonormé. (D) est la droite d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4x+y+z & = & 0 \\ 2x+3y+5z & = & -4 \end{array}\right.$$

A est le point de coordonnées $(1,1,1)$. Déterminer les plans qui contiennent (D) et dont la distance à A vaut 1.

35. (Centrale 97) Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé. $A(a,0)$ $B(b,0)$. Soit (D) une droite qui ne contient ni A ni B. On considère le symétrique A' de A par rapport à (D).
    (a) Montrer que si (D) n'est pas parallèle à $(A'B)$, il existe un unique point $M \in (D)$ tel que (D) soit bissectrice de (MA, MB).
    (b) On prend $a+b=0$ et (D) passe par O. Trouver les points $M \in (D)$ tels que (D) soit bissectrice de (MA, MB).
    (c) Même question avec a et b quelconques et (D) passe par O.
    (d) Étudier le lieu des points M tels que l'une des bissectrices de (MA, MB) passe par O.

36. (X 2000) Soit ABC un triangle équilatéral du plan affine euclidien. On note I, J, K les milieux respectifs de AB, BC, CA. On définit respectivement sur les côtés AB, BC, CA, trois points M, N, P par :

$$\overline{IM} = x \qquad \overline{JN} = y \qquad \overline{KP} = z$$

Montrer qu'il existe un point O du plan dont les projections orthogonales sur les trois côtés sont M, N, P si et seulement si $x+y+z=0$.

37. (CCP 2002) Déterminer le lieu des points du plan affine euclidien dont l'affixe z, en repère orthonormé, vérifie :

$$\frac{z+2\mathrm{i}+3}{z-2\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbf{R}$$

38. (1996) Trouver les courbes planes vérifiant $y^2 = a^2 + s^2$ où s désigne l'abscisse curviligne et $a > 0$.
39. (Centrale 97) Chercher les arcs biréguliers passant par A et tels que la mesure de l'arc orienté AM soit proportionnelle à l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.
40. (1996) Image du demi plan $y > 0$ par la transformation géométrique dont la forme complexe est :

$$z \mapsto \frac{z-2i}{z-i}$$

41. (1996) Trouver l'ensemble des isométries du plan qui conservent la réunion de deux cercles dont les centres sont non confondus et les rayons différents.
42. (X98) On considère l'arc paramétré (γ) défini par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t^2 \\ y & = & 2t^3 \end{array}\right.$$

quel est le nombre de droites normales et tangentes à (γ) ?

43. (Mines 98) Lieu des sommets des paraboles de foyer donné F qui passent par un point fixe A.
44. (Centrale 1998) On considère la courbe $(\mathcal{C})$ du plan affine euclidien orienté définie en repère orthonormé par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2a\cos t \\ y & = & a\sin t \end{array}\right.$$

(a) Trouver le repère de Frenet.
(b) Courbure et rayon de courbure.
(c) Développée *(hors programme)*.

45. (Mines 98) Montrer que la tangente à l'ellipse est bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.
46. (CCP 98) Soit D le domaine défini par : $0 \le x \le y \le 1$. Calculer :
$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$
47. (CCP 99) Soit D le domaine défini par : $|x| \le x^2+y^2 \le 1$. Calculer :
$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$$
48. (98) Étudier les triangles de périmètre maximal inscrits dans un cercle.
49. (Mines 99) Soit ABC un triangle équilatéral. Étudier les valeurs prises par l'expression :
$$PA^2+PB^2+PC^2$$
lorsque P décrit le cercle inscrit à ce triangle.
50. (Mines 2000) Trouver l'image de l'ensemble des points du plan complexe défini par $1 \le |z| \le 2$ par la transformation $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.
51. (CCP 99) Soit z un complexe tel que $|z^2-1/2| < 1/2$. Montrer que $|z-1/3| < 1/3$.
52. (1996) Étude de la courbe :
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = t\cos t - \sin t \qquad \text{avec } t \in [-2\pi, 2\pi] \end{cases}$$
La tracer à l'ordinateur. Prouver que les tangentes aux points singuliers passent par 0.
53. (1996) Étude de la courbe :
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + 3\sin t \\ y(t) = 3\cos t + 2\sin t \end{cases}$$

54. Allure de la courbe (C) $\rho = \frac{\sin\theta}{\theta}$. Montrer que les points tels que la normale à (C) passe par O sont sur un même cercle.
55. (1996) Déterminer l'ellipse de Foyers $F(1,1)$ et $F'(-1,1)$ dont un des sommets est $A(2,1)$.
56. (1996) Soit (E) l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
    (a) Paramétrage de (E) et interprétation géométrique du paramètre.
    (b) Condition nécessaire et suffisante pour que la droite (D) d'équation $ux+vy+w=0$ soit tangente à (E).
    (c) Lieu des points d'où l'on peut mener à (E) deux tangentes orthogonales.
57. (1996) Soit (E) l'ensemble des points du plan définit en repère orthonormé par :
$$x^2+ay^2-2bx+c=0$$
    (a) Condition nécessaire et suffisante pour que (E) soit une ellipse de grand axe Ox.
    (b) Condition nécessaire et suffisante pour qu'en plus O soit un foyer de (E) : $ac+b^2=c$.
58. (1996)
    (a) Tracer la courbe (Γ) d'équation polaire $\rho = 1+\cos\theta$.
    (b) Lieu des symétriques de O par rapport aux tangentes à (Γ).
    (c) Une droite passant par O coupe généralement (Γ) en deux points P et Q. Si A est le point de coordonnées $(2,0)$, déterminer le lieu du centre de gravité du triangle APQ quand la droite varie.
59. (1996) Soit (E) une ellipse d'excentricité e et de foyers F et F'. Lieu des orthocentres du triangle MFF' lorsque M décrit E. Représentation paramétrique et cartésienne de la courbe (C) obtenue. Tracer (C) (avec l'ordinateur ?). Application numérique $c = \sqrt{2}/2$.
60. (1996) Tracer la courbe (Γ) :
$$x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0$$
Déterminer le lieu des centres des cercles passant par 0 et tangents à (Γ).

61. (1996) Oxy est un repère orthonormé. A un point fixé de Ox, B un point de Oy, C est tel que $OACB$ soit un rectangle. Soit M le projeté orthogonal de B sur OC.
    (a) Lieu (Γ) des points M quand on fait varier B.
    (b) (Δ) est la droite orthogonale à Ox passant par A. Aire de la surface limitée par (Γ) et (Δ).
    (c) On fait tourner (Γ) autour de (Δ), Volume du solide engendré.
62. (1996) Condition nécessaire et suffisante sur t_1 t_2 t_3 pour que les normales à $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$ soient concourantes.