Compléments sur le groupe orthogonal d'un espace Euclidien

PC*2

1 février 2001

1 Préliminaires

1.1 But de cet article

Cette note a pour but de faire le point sur quelques questions trop rapidement survolées en cours. **A part les idées de base et ce qui concerne la première année, tout ce qui est écrit ici est hors programme mais il faut avoir quelques vues saines afin de pouvoir aborder certains exercices, et se débrouiller**

1.2 Les idées de base

Soit E un espace **euclidien** de dimension ≥ 1 et $f \in \mathrm{O}(E)$.

– Si F est un sous espace de E stable par F,
  – Il en est de même de $F^{\perp}$. $f(F) = F$ et $f(F^{\perp}) = F^{\perp}$ *car f est injectif et conserve les dimensions des sous espaces.*
  – Soient g et h les endomorphismes induits par f sur F et $F^{\perp}$, alors :

$$\det(f) = \det(g).\det(h) \text{ et } \chi_f(X) = \chi_g(X).\chi_h(X)$$

La preuve, déja faite lors du cours sur la réduction des endomorphismes, se fait en écrivant les matrices de f et de $f - \lambda Id$ dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

– $\det f \in \{-1, 1\}$ et $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.
– Les sous espaces $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$ sont orthogonaux *(on observera qu'ils peuvent être réduits à $\{0\}$). en effet si $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Ker}(f + Id)$, il vient :*

$$(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = (f(\overrightarrow{x})|f(\overrightarrow{y})) = (\overrightarrow{x}| - \overrightarrow{y}) = -(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$$

d'où $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = 0$
– Tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle *(regarder les limites de P en $\pm\infty$ et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires ou bien utiliser la décomposition de d'Alembert gauss de P)*
– f admet un sous espace stable de dimension 1 ou 2. Rappelons l'idée de la démonstration : On observe que la partie symétrique $g = \frac{f+f^*}{2}$ de f admet un vecteur propre $\overrightarrow{u}$ associée à une valeur propre λ. Deux cas se présentent :
  – Si $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est lié :
  Comme $\overrightarrow{u} \neq 0$, il existe λ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ et la droite $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ est stable par f.
  – Si $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est libre :
  Comme $f^* = f^{-1}$, il vient :

$$f^2(\overrightarrow{u}) = 2\lambda f(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}$$

  et le plan $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est stable par f.
– **Enfin et toujours, faire des dessins.**

2 Rappels de première année et compléments

2.1 Le groupe orthogonal du plan vectoriel euclidien

Dans ce qui suit, on note $R(\theta)$ et $S(\theta)$ les matrices :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On a alors les propriétés suivantes :
– $\forall \theta \in \mathbf{R},\ R(\theta) \in \mathrm{O}_2^+(\mathbf{R})$.

- $\forall \theta, \theta' \in \mathbf{R}, R(\theta + \theta') = R(\theta).R(\theta')$. Il en résulte que l'application $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme du groupe $(\mathbf{R}, +)$ dans le groupe $(\mathrm{O}_2^+(\mathbf{R}), .)$. En particulier $R(-\theta) = R(\theta)^{-1}$.
- Le morphisme précédent est surjectif. Il en résulte que le groupe $(\mathrm{O}_2^+(\mathbf{R}), .)$ est commutatif.
- L'application $\theta \mapsto S(\theta)$ est une surjection de $\mathbf{R}$ sur $\mathrm{O}_2^-(\mathbf{R})$. **Attention : $\mathrm{O}_2^-(\mathbf{R})$ n'est pas un groupe pour le produit matriciel.**

Soit alors E_2 un plan vectoriel euclidien, (e) une base orthonormée de E_2.

- Si $f \in \mathrm{O}^+(E_2)$, on dit que f est une *rotation*. la matrice de f est, dans la base (e), de la forme $R(\theta)$. *f admet la même matrice dans toute base orthonormée de E_2 de même sens que (e). Elle admet la matrice $R(-\theta)$ dans toute base orthonormée de E_2 de sens contraire à (e).* Le réel θ ne dépend donc (à 2π prés) que de la rotation f et de l'orientation de E_2 ; on l'appelle *une mesure de l'angle de f*.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs unitaires de E_2, il existe une unique rotation f tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.
- Si $f \in \mathrm{O}^-(E_2)$, c'est une réflexion. En particulier $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 1\}$ et f est diagonalisable.
- Dans le plan orienté, toute rotation de E_2 d'angle θ est produit de deux réflexions s_1 et s_2 dont l'une peut être choisie arbitrairement et dont une mesure de l'angle des deux droites vaut $\theta/2$.

2.2 Etude spectrale du groupe orthogonal de l'espace Euclidien de dimension 3

On se propose ici de retrouver les résultats de première année par des considérations spectrales. **Les démonstrations qui suivent sont faciles à comprendre si l'on fait des figures.**

Théorème 1. *Soit $f \in \mathrm{O}^+(E_3)$ telle que $f \neq Id$, on dit que f est une rotation pure. Alors :*

- *1 est valeur propre de f . Le sous espace propre associé est une droite appelée* axe de f.
- *Si D est l'axe de f et P le plan $D^\perp$, f stabilise P et y induit une rotation r. Si on oriente E_3 et le plan P (par exemple par le choix d'un vecteur unitaire sur D), l'angle de la rotation r s'appelle* angle de f.
- *Si θ est l'angle de f, la matrice de f dans une base orthonormée directe $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ où $\overrightarrow{K}$ dirige D et $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est une base orthonormée directe*

de P vaut :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- Montrons que $1 \in \mathrm{Sp}(f)$:
  χ_f est de degré 3 donc admet au moins une racine réelle λ qui est une valeur propre de f et qui vaut donc ± 1. Si $\lambda = -1$, soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f + Id)$, $\Delta = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$. Le plan $Q = \Delta^\perp$ est stable par f et l'endomorphisme s que f y induit est une réflexion d'apres 1.2 donc s admet 1 comme valeur propre et f aussi.
- Montrons que le sous espace propre associé est une droite :
  Soit $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f - Id)$ un vecteur unitaire propre pour 1. L'endomorphisme r induit par f sur le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})^\perp$ en est une rotation différente de Id d'aprés 1.2.

$$\chi_f = -(X - 1)\chi_r$$

Or χ_r n'admet pas la racine 1 car sinon r serait l'identité et f aussi ; donc la multiplicité de la valeur propre 1 vaut 1, il en résulte $\dim \mathrm{Ker}(f - Id) \leq 1$ et donc $\dim \mathrm{Ker}(f - Id) = 1$. Le reste est identique à ce qui a été fait en première année.

□

Théorème 2. *Soit $f \in \mathrm{O}^-(E_3)$. Alors :*

- $-1 \in \mathrm{Sp}(f)$ *et* $\dim \mathrm{Ker}(f + Id)$ *peut prendre les valeurs* $1, 3$.
- *Si* $\dim \mathrm{Ker}(f + Id) = 3$ *:*
  $f = -Id$.
- *Si* $\dim \mathrm{Ker}(f + Id) = 1$ *:*
  f est soit une réflexion, soit se décompose de manière unique en le produit commutatif d'une réflexion et d'une rotation pure dont l'axe est orthogonal au plan de la réflexion.

Démonstration.

- Prouvons que $-1 \in \mathrm{Sp}(f)$:
  f admet 1 ou -1 comme valeur propre puisque χ_f a au moins une racine réelle. Si 1 est valeur propre, l'endomorphisme s induit par f sur le plan orthogonal à la droite engendrée par un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f - Id)$, est une réflexion d'aprés 1.2 donc admet la valeur propre -1.
- Discussion d'aprés $\dim \mathrm{Ker}(f + Id)$:
  Remarquons d'abord que $\dim \mathrm{Ker}(f + Id) \neq 2$ car sinon l'orthogonal

de cet espace serait une droite D stable par f. Si f est un vecteur unitaire de D, il vient $f(\overrightarrow{u}) = \pm\overrightarrow{u}$ et donc $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ puisque $\overrightarrow{u} \perp \mathrm{Ker}(f + Id)$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\det f$. Donc :

$$\dim \mathrm{Ker}(f + Id) \in \{1, 3\}$$

- si $\dim \mathrm{Ker}(f + Id) = 3$:

$$f = -Id$$

- si $\dim \mathrm{Ker}(f + Id) = 1$:
  Soit D la droite $\mathrm{Ker}(f + Id)$, $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire qui dirige D et $P = D^{\perp}$. Soit s la réflexion par rapport à P et $r = s \circ f$. $\det r = 1$ et

$$r(\overrightarrow{u}) = s \circ f(\overrightarrow{u}) = s(-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$$

  donc r est soit Id, auquel cas $f = s$, soit une rotation pure d'axe D et $f = s \circ r$.
  Prouvons que s et r commutent : Si $\overrightarrow{x} \in P$, $r(\overrightarrow{x}) \in P$, et donc $s(r(\overrightarrow{x})) = r(\overrightarrow{x})$ et $r(s(\overrightarrow{x})) = r(\overrightarrow{x})$. Si $\overrightarrow{x} \in D$, $s(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x}$, $r(s(\overrightarrow{x})) = -r(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x} = f(\overrightarrow{x}) = s \circ f(\overrightarrow{x})$. Il en résulte que $r \circ s$ et $s \circ r$ coïncident sur D et P qui sont supplémentaires, donc coïncident.
  Prouvons que la décomposition est unique : Si f s'écrit sous la forme $\rho \circ \sigma$ où ρ est une rotation pure d'axe Δ et σ une réflexion de plan Π orthogonal à Δ, si $\overrightarrow{v} \in \Delta$, il vient $\sigma(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ et $\rho(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ d'où $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ et $\Delta = D$ d'où $\sigma = s$, il s'ensuit $\rho = r$

□

2.3 Comment déterminer l'axe et l'angle d'une rotation

On se place dans un espace euclidien orienté E_3. On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E_3)$, représenté par sa matrice $M \neq I_3$ dans une base orthonormée directe $(e) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On se propose de prouver que f est une rotation (nécessairement pure puisque $M \neq I_3$) et d'en déterminer l'axe D et une mesure de l'angle en orientant convenablement $P = D^{\perp}$. Ceci est permis par la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit $f \in \mathrm{O}^+(E_3)$ une rotation pure d'un espace E_3 euclidien orienté. Orientons son axe D par le choix d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{K}$. On sait que l'ensemble des bases orthonomée $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ du plan $P = D^{\perp}$ telles que la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ soit directe définit une orientation de P dite associée à $\overrightarrow{K}$. Une mesure θ de l'angle orienté de f pour cette orientation, (c'est-à-dire l'angle orienté de la rotation induite par f sur P pour l'orientation d'icelui ci-dessus définie) est entièrement déterminée modulo 2π par son cosinus et son sinus. Il vient :*

- *$\cos\theta$ ne dépend pas des orientations, il est donné par :*

$$\boxed{\mathrm{Tr}(f) = 1 + 2\cos\theta}$$

- *Soit g la partie antisymétrique de f :*

$$\boxed{g = \frac{f - f^*}{2}}$$

  Alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{\omega}$ tel que, pour tout $\overrightarrow{x} \in E_3$:

$$\boxed{g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}}$$

  et :

$$\boxed{\overrightarrow{\omega} = \sin(\theta)\,\overrightarrow{K}}$$

Démonstration. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{K}$ ayant été choisi sur D, on considère une base orthonormée $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ de $P = D^{\perp}$ telle que la base orthonormée $(B) = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ de E_3 soit directe. Cette base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ définit l'orientation de P associée à $\overrightarrow{K}$. La matrice R de f **dans cette base** (B) prend, puisqu'elle est orthonormée, la forme :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$ et :

$$\mathrm{Mat}(g, (B)) = \frac{R -{}^t R}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors les égalités :

$$\boxed{g(\overrightarrow{I}) = \sin\theta\,\overrightarrow{J} = (\sin\theta\,\overrightarrow{K}) \wedge \overrightarrow{I}}$$

$$\boxed{g(\overrightarrow{J}) = -\sin\theta\,\overrightarrow{I} = (\sin\theta\,\overrightarrow{K}) \wedge \overrightarrow{J}}$$

$$\boxed{g(\overrightarrow{K}) = 0 = (\sin\theta\,\overrightarrow{K}) \wedge \overrightarrow{K}}$$

donc g coïncide avec $\overrightarrow{x} \mapsto \sin\theta\overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{x}$ sur la base (B) donc sur E_3. L'unicité de $\overrightarrow{\omega}$ est laissée aux lecteurs. □

Exemple 1. Réduire l'endomorphisme f de E_3 représenté dans une base orthonormée directe $(e) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ par la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

On précise les étapes :

1) On vérifie que c'est un automorphisme orthogonal : Comme la base (e) est orthonormée, on vérifie que :

$$\boxed{M^t M = I_3}$$

2) On vérifie que c'est une rotation pure : *via* le déterminant :

$$\boxed{\det M = 1 \quad \text{et} \quad M \neq I_3}$$

3) On calcule le cosinus de son angle : celui ci est indépendant de l'orientation :

$$\boxed{\operatorname{Tr} M = 2 = 1 + 2\cos\theta \quad \text{donc} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}}$$

4) On calcule $\overrightarrow{K}$ et $\sin\theta$: La matrice de la partie antisymétrique g de f est, dans (e) :

$$\frac{M -^t M}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche donc, dans la base (e), un vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{\omega} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}}$$

tel que, pour tout $\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \in E_3$ on ait $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x} = g(\overrightarrow{x})$; or les composantes de $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}$ sont, dans la base (e) :

$$\begin{pmatrix} bx - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ce qui impose :

$$\boxed{c = 0, \qquad a = b = \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

Il vient donc :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta\,\overrightarrow{K} = \overrightarrow{\omega} = \frac{\sqrt{6}}{4}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})}$$

On peut donc choisir $\sin\theta$ à l'aide de la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ puis $\overrightarrow{K}$ à l'aide de la dernière relation, ce qui autorise deux choix :

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{K} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})}$$

Donc f est la rotation d'angle $\pi/3$ autour du vecteur $\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$. Ou bien, ce qui revient au même :

$$\boxed{\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{K} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})}$$

Qui est la rotation d'angle $-\pi/3$ autour du vecteur $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
Ces deux interprétations de f sont les mêmes car le changement de $\overrightarrow{K}$ en $-\overrightarrow{K}$ induit un changement d'orientation sur $P = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{K})^\perp$ qui change θ en son opposé par l'intermédiaire de son sinus.

Exercice 1 (Exercice d'entraînement corrigé). Le même que l'exemple précédent avec :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $M \in \mathrm{O}_3^+(\mathbf{R})$ et donc que f est une rotation pure.
On trouve, avec les notations de l'exemple précédent :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{7}{18}}$$

$$\boxed{\frac{M - {}^t M}{2} = \frac{5}{18}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

D'où l'on déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{\omega} = \sin\theta\,\overrightarrow{K} = \frac{5}{18}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})}$$

En choisissant par exemple :

$$\boxed{\sin\theta = \frac{5\sqrt{11}}{18}}$$

On trouve :

$$\boxed{\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})}$$

Donc f est la rotation d'angle Arccos $\left(\frac{7}{18}\right) \in]0, \pi/2[$ autour de $\overrightarrow{K}$.

Exemple 2. Etudier l'endomorphisme f d'un espace euclidien de dimension 3 représenté, en base orthonormée, par la matrice :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

On travaille avec Maple. On évalue M^tM et $\det(M)$ qui vaut -1. On cherche $\mathrm{Ker}(f + Id)$


```
N:=evalm(M+I3);
L:=nullspace(N):
V:=L[1];
```

$$N := \begin{bmatrix} \frac{17}{9} & 1/9 & -4/9 \\ 4/9 & 5/9 & \frac{7}{9} \\ 1/9 & \frac{8}{9} & \frac{13}{9} \end{bmatrix} \qquad V := [1/3, -5/3, 1]$$

On norme le vecteur $\overrightarrow{V}$ dans le but de fabriquer le projecteur orthogonal P d'image $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{V})$ puis la réflexion H par rapport au plan orthogonal à $\overrightarrow{V}$.

```
U:=evalm((1/norm(V,2))*V);
P:=matrix(3,3,(i,j)->U[i]*U[j]);
H:=evalm(I3-2*P);
```

$$\overrightarrow{U} = [\frac{\sqrt{35}}{35}, -\frac{\sqrt{35}}{7}, \frac{3\sqrt{35}}{35}]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/35 & -1/7 & \frac{3}{35} \\ -1/7 & 5/7 & -3/7 \\ \frac{3}{35} & -3/7 & \frac{9}{35} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{33}{35} & 2/7 & -\frac{6}{35} \\ 2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -\frac{6}{35} & 6/7 & \frac{17}{35} \end{bmatrix}$$

Puis on vérifie que $R = HM$ est la matrice d'une rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{V}$

```
R :  = evalm (H&*M) ;
```

$$R := \begin{bmatrix} \frac{298}{315} & -\frac{11}{63} & -\frac{86}{315} \\ \frac{10}{63} & \frac{62}{63} & -\frac{5}{63} \\ \frac{89}{315} & \frac{2}{63} & \frac{302}{315} \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que $R^tR = I_3$ et que $\det(R) = 1$. On calcule $\frac{(A-{}^tA)}{2}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/6 & -\frac{5}{18} \\ 1/6 & 0 & -1/18 \\ \frac{5}{18} & 1/18 & 0 \end{bmatrix}$$

le cosinus de l'angle de R, calculé via la trace, vaut 17/18. Si $\overrightarrow{K}$ est un vecteur unitaire qui oriente l'axe de R :

$$\sin\theta\ \overrightarrow{K} = \frac{\overrightarrow{i}}{18} - \frac{5\overrightarrow{j}}{18} + \frac{\overrightarrow{k}}{18}$$

Donc, en orientant l'axe de R de manière à ce que $\sin\theta \geq 0$:

$$\overrightarrow{K} = \frac{\sqrt{35}\,\overrightarrow{i}}{35} - \frac{\sqrt{35}\,\overrightarrow{j}}{7} + \frac{3\sqrt{35}\,\overrightarrow{k}}{35} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{35}}{18}$$

On retrouve $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{U}$ ce qui était prévu.

Exemple 3. L'espace euclidien E_3 est muni d'une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. r est la rotation d'angle $\pi/3$ par rapport à l'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de composantes $(1, 2, 1)$; s est la réflexion par rapport à l'orthogonal de la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(1, -1, -1)$. Etudier $s \circ r$.
On travaille avec la bibliothèque linalg. On définit d'abord la base, un vecteur unitaire $\overrightarrow{N}$ dirigeant l'axe et enfin l'angle de la rotation :

```
i:=vector([1,0,0]);j:=vector([0,1,0]);k:=vector([0,0,1]);
U:=vector([1,2,1]);N:=evalm(1/norm(U,2)*U);
theta:=Pi/3;
```

$$\overrightarrow{N} = 1/6\sqrt{6}, 1/3\sqrt{6}, 1/6\sqrt{6}] \qquad \theta := 1/3\,\pi$$

On a vu en première année que l'image d'un vecteur $\overrightarrow{x} \in E_3$ par la rotation r d'axe $\overrightarrow{N}$ et d'angle θ, **pour l'orientation de** $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{N})^\perp$ **déterminée par** $\overrightarrow{N}$ était donnée par :

$$\boxed{r(\overrightarrow{x}) = \cos(\theta)\,\overrightarrow{x} + (1-\cos(\theta))\,(\overrightarrow{N}|\overrightarrow{x})\,\overrightarrow{N} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{x}}$$

Écrivons une procédure Maple R qui prend $\overrightarrow{x}$ en argument et qui retourne $r(\overrightarrow{x})$:


```
R:=proc(x) global N,theta;
   evalm(cos(theta)*x+
   (1-cos(theta))*dotprod(N,x)*N+
   sin(\theta)*crossprod(N,x))
   end;
```

La matrice de R dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est donnée par :

```
M:=transpose(matrix([R(i),R(j),R(k)]));
```

$$M := \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & 1/6 - 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/12 + 1/6\sqrt{3}\sqrt{6} \\ 1/6 + 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & 5/6 & 1/6 - 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} \\ 1/12 - 1/6\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/6 + 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

Écrivons maintenant une procédure Maple qui calcule la matrice de s relativement à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On sait que, si $\overrightarrow{v}$ est le vecteur de coordonnées $(1, -1, 1)$ relativement à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et Π le projecteur orthogonal d'image $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$, alors :

$$\boxed{s = \mathrm{Id} - 2\,\Pi}$$

On écrit d'abord la matrice P de Π :

```
V:=vector([1,-1,1]);n:=evalm(1/norm(V,2)*V);
P:=matrix(3,3,(p,q)->n[p]*n[q]);
I3:=diag(1$3);
S:=evalm(I3-2*P);
```

$$n := [1/3\sqrt{3}, -1/3\sqrt{3}, 1/3\sqrt{3}]$$

$$S := \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

La matrice, relativement à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, de la composée $t = s \circ r$ est alors :

```
T:=evalm(S&*M);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1/4 + 1/6\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/2 - 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & -1/4 \\ 1/2 - 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/2 & 1/2 + 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} \\ -1/4 & 1/2 + 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/4 - 1/6\sqrt{3}\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

T est une matrice orthogonale, de déterminant -1 et symétrique donc :

$$\boxed{I_3 = {}^t T\,T = T^2}$$

Donc t est **une symétrie orthogonale de déterminant -1 donc une réflexion**. Calculons son plan $H = \mathcal{V}(1) = \mathcal{V}(-1)^\perp$ après deux petites vérifications :

```
map(expand,evalm(T&*T));
det(T);
```

Maple répond :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -1$$

On calcule enfin un vecteur directeur de $H^\perp$:

```
nullspace(evalm(T+I3));
```

$$\left\{[3 - 2\sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, 1]\right\}$$

t est donc la réflexion relativement au plan H dont une équation, relativement à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, est :

$$\boxed{(3 - 2\sqrt{2})\,x + (-2 + \sqrt{2})\,y + z = 0}$$

Ce qu'on aurait pu étudier géométriquement en décomposant r sous la forme $s_1 \circ s_2$ où s_1 est la réflexio relativement au plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

3 Réduction des automorphismes orthogonaux en dimension n

Théorème 3. *Soit $f \in \mathrm{O}(E_n)$. Il existe une base orthonormée (e) de E_n où la matrice de f admet une représentation par blocs de la forme :*

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & \\ & R(\theta_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & R(\theta_p) & & \\ & & & & \mathrm{I}_r & \\ & & & & & -\mathrm{I}_s \end{pmatrix} \quad \textit{avec } \ 2p + r + s = n$$

Où les $R(\theta_i)$ sont des matrices de rotation de taille 2 et où I_k désigne la matrice unité de taille k. Tous les autres blocs non diagonaux sont nuls. Bien entendu certains des entiers p, r, s peuvent être nuls.

Démonstration.

– Cas où f n'admet ni 1 ni -1 comme valeur propre :
On prouve par récurrence sur $p \in \{2 \dots n\}$ la propriété (H_p) suivante : si (F, g) est un couple constitué d'un sous espace $F \neq \{0\}$ de E de dimension $\leq p$ et d'un automorphisme orthogonal g de F n'admettant ni 1 ni -1 comme valeur propre alors $\dim F$ est paire et il existe une base orthonormée de F où la matrice de g soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant constitués de matrices de la forme $R(\theta_i)$ avec $\theta_i \notin \pi\mathbf{Z}$.
(H_2) est laissée aux lecteurs, Supposons (H_{p-1}) vérifiée pour un entier p tel que $3 \leq p \leq n$, soit F un sous espace non réduit à $\{0\}$ de E tel que $\dim F \leq p$, muni d'un automorphisme orthogonal g sans valeur propre on a vu *(cf 1.2)* que g admet un plan ou une droite stable. Comme g n'admet pas de droite stable, il admet un plan stable P. L'endomorphisme induit par g sur P est une rotation de P puisqu'une réflexion de P admet les valeurs propres 1 et -1. Sa matrice, dans une base orthonormée de P est de la forme $R(\theta)$ où $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$ (car sinon elle aurait 1 ou -1 comme valeur propre). Reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à l'orthogonal du sous espace P dans F muni de l'automorphisme orthogonal qu'y induit g.

– Cas général :
Le plus simple est d'observer que le sous espace G (éventuellement réduit à $\{0\}$) :

$$G = \mathrm{Ker}(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(f + Id)$$

est stable par f et que son orthogonal F, qui est stable par f, est tel que l'endomorphisme qu'y induit f n'admet ni 1 ni -1 comme valeur propre.

$\square$

Exercice 2. E est un espace euclidien de dimension n.

1. Soient $(H_1, \dots, H_p)$ p hyperplans de E on note $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ un système de vecteurs tel que n_i dirige la normale à H_i.
2. Trouver une relation entre

$$\dim \bigcap_{i=1}^{p} H_i \ \text{ et } \ \mathrm{rg}(n_1, n_2, \dots, n_p)$$

On dit que les hyperplans sont *indépendants* si ce rang vaut p.

3. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$, on pose $\dim Ker(f - Id) = p$, prouver, par deux méthodes, que f se décompose en produit de $n-p$ réflexions par rapport à des hyperplans indépendants.
4. Prouver que si f est un produit de s réflexions alors : $s \geq n - p$.
5. (difficile) Prouver que, si f est un produit de $s \geq 1$ réflexions relativement à des hyperplans indépendants $(H_1, \ldots, H_s)$ alors :

$$\dim \mathrm{Ker}(f - Id) = \bigcap_{i=1}^{s} H_i$$

On pourra, par exemple, raisonner par récurrence sur s.

Table des matières

1 Préliminaires **1**
1.1 But de cet article 1
1.2 Les idées de base 1

2 Rappels de première année et compléments **2**
2.1 Le groupe orthogonal du plan vectoriel euclidien 2
2.2 Etude spectrale du groupe orthogonal de l'espace Euclidien de dimension 3 3
2.3 Comment déterminer l'axe et l'angle d'une rotation 5

3 Réduction des automorphismes orthogonaux en dimension n **13**