TD2 Espaces Euclidiens INDICATIONS

PC*2

2 février 2003

Les indications sont en italique

1. (X98) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'elle est définie positive si et seulement si ses mineurs "diagonaux" sont strictement positifs.

   Première méthode *Commencer par prouver que si A et A' sont deux matrices symétriques qui représentent la même forme bilinéaire symétrique dans deux bases différentes dont P est la matrice de passage alors $A' = {}^t PAP$. Introduire ensuite la forme bilinéaire symétrique B canoniquement associée à S et B_k la restriction d'icelle à $V_k \times V_k$ où $V_k = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$ $(1 \leq k \leq n)$. Supposer que B_{k-1} est définie positive et introduire une base $(e_1, \ldots, e_{k-1})$ de V_{k-1}, orthonormée pour B_{k-1}. Fabriquer ensuite un vecteur $f_k \in V_k$ tel que $f_k - \epsilon_k \perp V_{k-1}$ pour B_k et examiner la matrice de B_k par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_{k-1}, f_k)$ pour conclure par récurrence sur k.*

   Deuxième méthode *Raisonner par récurrence sur n en introduisant $\Pi A_{|H}$ où Π est un projecteur orthogonal ad hoc d'image l'hyperplan H.*

2. (X 98) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   – A possède m vecteurs propres (réels) linéairement indépendants.
   – Il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, positive et de rang m telle que $AS = S^tA$
   Pour $m = n$ reconnaitre un exercice traité en cours. Utiliser une technique de blocs

3. (X98) Soit E un espace euclidien et $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $(a(x)|x) = 0$. Montrer que :
$$E = \mathrm{Ker}\, a \overset{\perp}{\oplus} H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} H_k$$

avec $\dim(H_i) = 2$, $H_i = \mathrm{Vect}(v_i, w_i)$ et $(a(v_i)|w_i) = -1$.
Commencer par prouver que $E = \mathrm{Ker}\, a \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, a$. Se ramener au cas où a est un automorphisme. Prouver alors que $n = \dim E$ est pair et que si x est un vecteur propre de a^*a, $\mathrm{Vect}(x, a(x))$ est un plan stable par a. Conclure par une récurrence judicieuse.

4. (X 98) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, définie positive. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, définies positives, telles que : $\det S \geq \alpha > 0$. Montrer que :
$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{Tr}(SA) = n\,(\alpha \det A)^{1/n}$$
Il suffit de calculer dans une base convenable

5. (X98) Soit $A \in \mathcal{S}^{++}_{n+p}(\mathbf{R})$, définie par blocs sous la forme :
$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline {}^tB & A_2 \end{array}\right) \qquad \text{avec } A_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})\,, A_2 \in \mathcal{S}_p(\mathbf{R})\,, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$$
Montrer que
$$\det A \leq \det(A_1)\det(A_2)$$
Commencer par redémontrer l'inégalité de Hadamard : $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$ *en utilisant la décomposition $A = {}^tTT$ vue en cours. Adapter la méthode par blocs en utilisant un résultat démontré en cours.*

6. (X 98, 2001) Soient M et N deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_3^{++}(\mathbf{R})$. On pose :
$$\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \quad \text{avec } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$$
$$\mathrm{Sp}(N) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} \quad \text{avec } \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$$
Montrer que
$$\mathrm{Tr}(MN) \leq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mu_i$$
Introduire les endomorphismes f et g canoniquement associés à M et N. Observer que, si (e) est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique alors $\mathrm{Tr}\, fg = \sum_{i=1}^3 (e_i|fg(e_i))$. Prouver, à l'aide d'une base convenable que :
$$(e_3|f(e_3)) \leq \lambda_3 \quad (e_2|f(e_2)) + (e_3|f(e_3)) \leq \lambda_2 + \lambda_3$$
$$(e_1|f(e_1)) + (e_2|f(e_2)) + (e_3|f(e_3)) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
puis choisir une base (e) convenable et calculer un peu. dans la cas n il peut être utile d'utiliser l'exercice suivant.

7. (X98) On se place dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ de valeurs propres (λ_i) avec :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

On note $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres associés. On pose, pour $X \in \mathbf{R}^n$, $\phi(X) = (MX|X)$. et

$$W_k = \mathrm{Vect}(V_1, \ldots, V_k)$$

   (a) Montrer que
$$\max_{X \in W_k} \phi(X) = \lambda_k$$

   (b) Montrer que
$$\min_{X \perp W_{k-1}} \phi(X) = \lambda_k$$

   (c) Calculer
$$\min_{\dim W = k} \left(\max_{X \in W} \phi(X) \right)$$

Pour la dernière question, observer que $W \cap \mathrm{Vect}(V_k, \ldots, V_n) \neq \{0\}$.

8. (X98) Soient α, β, x, y des réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$.
Soient A et B deux matrices réelles positives. Montrer que :

$$(\det A)^\alpha \det(B)^\beta \leq \det(\alpha A + \beta B)$$

S'inspirer d'un exercice traité en cours en commençant par traiter les cas où A *et* B *commutent puis se ramener à* $B = \mathrm{I}_n$

9. (X98) Déterminer les formes bilinéaires ϕ sur un espace vectoriel réel E de dimension finie vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x, y) = 0 \Rightarrow \phi(y, x) = 0$$

Commencer par traiter le cas où $\dim E = 2$. *Prouver alors que* f *est soit symétrique soit antisymétrique. En déduire que, dans le cas général on a* $f(y, x) = \pm f(x, y)$ *; fixer alors* x *et considérer les deux sous espaces* $\{y \,/\, f(x, y) = f(y, x)\}$ *et* $\{y \,/\, f(x, y) = -f(y, x)\}$ *dont la réunion vaut* E. *On peut aussi, en dimension finie, représenter* f *par un endomorphisme* a *et prouver que* $a^* = \pm a$.