TD Intégration sur un intervalle quelconque

PC*2

6 novembre 2003

1. (CCP 99) Etudier, suivant les valeurs de α, l'existence de :
$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
2. (CCP 2001) Déterminer a tel qu'existe l'intégrale :
$$\int_1^{+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} + a\,\ln x\right]\mathrm{d}x$$
3. (CCP 2000) Soient α et β deux réels. Etudier l'intégrabilité, sur $]0,+\infty[$, de :
$$x^\alpha\left[1-\exp\left(-x^\beta\right)\right]$$
4. (Centrale 2001 et TPE 2003)
   (a) Encadrer, sur $[0,\pi/2]$, le graphe de la fonction sinus par deux droites passant par l'origine.
   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto t\ \mathrm{e}^{-t^\alpha|\sin t|}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
5. (Centrale 2002) Étudier la série de terme général :
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est-elle définie ?
6. (CCP 98 et 2001, ENSEA 2003) calculer :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}}$$

7. (CCP 2002) Calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$
et en déduire :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^2}$$
8. (CCP 2000) Etudier l'intégrabilité sur $]0,1[$ de :
$$f\ :\ x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1-x)^{3/2}}$$
A l'aide du changement de variable $x=\sin^2\phi$, calculer $\int_{]0,1[} f(x)\,\mathrm{d}x$.
9. Existence et valeur de :
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1-x+x^2)^2}$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)\right)}{x+2}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1-t^3}}$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(t^4+1)^3}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t^2-t^3}}\,\mathrm{d}t$$
10. (Mines 2003) Existence et calcul de :
$$f(a) = \int_{-1}^1 \frac{x+a}{x-a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$
11. Existence de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\tanh x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$.
12. Existence de :
$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\,\mathrm{d}x$$

13. Existence de :
$$\int_0^{+\infty} \ln(\tanh x)\,\mathrm{d}x$$
14. (CCP 2000) Calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
15. (Mines 2002) Calculer :
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
16. (Cen 2000) Existence et calcul de :
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$$
17. (Cen 99) Trouver a pour que la fonction :
$$x \mapsto x+1-\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{a}{x}$$
soit intégrable sur $[1,+\infty[$.
18. (CCP 2000) Existence et calcul de :
$$\int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a-x}}\,\mathrm{d}x, \qquad a>0 \text{ et } n\in\mathbf{N}$$
19. (TPE 2003) Existence et calcul de :
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$$
20. (Mines 99) Pour $x\in]0,\pi/2[$, on pose :
$$f(x)=\frac{\cos(x)^{\sin x}}{\cos(x)^{\sin x}+\sin(x)^{\cos x}}$$
Etudier l'intégrabilité de f sur $]0,\pi/2[$ et calculer $\int_{]0,\pi/2[} f(x)\,\mathrm{d}x$.

21. (CCP 99) Etudier I_α avec :
$$I_\alpha=\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
Pour $\alpha>1$ puis pour $\alpha>1/2$.
22. (X 2000) Soit f une fonction continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. Etudier l'intégrabilité, sur $I=]0,+\infty[$, de :
$$g\ :\ x\mapsto f\left(\left|x-\frac{a^2}{x}\right|\right)$$
et calculer $\int_I g(x)\,\mathrm{d}x$.
23. (Mines 2003) Étudier la nature de la série de terme général :
$$u_n=(-1)^n\int_0^1 \cos\left(nt^2\right)\,\mathrm{d}t$$
24. (Centrale 2002) Étudier la fonction f définie par :
$$f(x)=x\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}}$$
Étude locale au voisinage de -1 et branche infinie.
25. Domaine de définition, étude locale au voisinage de 1, courbe représentative de :
$$x\mapsto \int_1^x \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$$
26. (Cen 98) Définition, variations et équivalents aux bornes du domaine de :
$$x\mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$$
27. (Cen 99) Domaine de définition, limites et équivalents aux bornes du domaine de :
$$f(x)=\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

28. (Mines 2003) Soit $\alpha > 0$. Équivalent de $u_n = \int_0^n \mathrm{e}^{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$.
29. (Centrale 98 et 99) Calculer :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}$$
30. (CCP 2000) Calculer :
$$\int_{-4}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2+3x-4|}}$$
31. (Centrale 2001) Existence de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{x^a+\cos x} \qquad a > 0$$
32. (Mines 97 et 2002) Intégrabilité, sur $[0,+\infty[$ de :
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2|\sin x|^{3/2}}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3|\sin x|}}\ ?$$
33. (CCP 98) Soit $f \in \mathcal{C}([1,+\infty[,\mathbf{R})$, croissante, telle que, $f(x) > 1$ pour tout x. Prouver que si $1/f$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, $t \mapsto \frac{1}{t\ln(f(t))}$ non plus.
34. (Mines 98) Soit $b > 1$, on pose :
$$\psi(x) = x\frac{x^2-b}{x^2-1}$$
étudier les variations de ψ et l'intégrabilité, sur $[0,+\infty[$ de :
$$x \mapsto x^2 \exp\left(-x^2\psi(x)^2\right)$$
35. (Centrale 2002) La fonction f définie sur $I =]0,1]$ par :
$$f(t) = \frac{(-1)^{\left[\frac{1}{t}\right]}}{t}$$
est-elle intégrable sur I ? Déterminer, à l'aide de la formule de Stirling :
$$\lim_{x\to 0_+} f(t)\,\mathrm{d}t$$

36. (Mines 98) Discuter, suivant $\alpha > 0$, le nombre de racines de l'équation :
$$x^\alpha - \sin x = 0$$
Soit a la plus petite racine strictement positive de cette équation (quand elle en a). Etudier l'intégrabilité sur $]0,a[$ de :
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sin x - x^\alpha}}$$
37. (Cen 99) Soit $x > 0$, prouver l'existence d'un unique $y > 0$ tel que :
$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t = x\,\mathrm{e}^{y^2}$$
    (a) Montrer que $y < x$.
    (b) On note $y = f(x)$; montrer que f est dérivable et croissante.
    (c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)^2 - x^2$.
    (d) Graphe de f ?
    (e) Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$.
38. (Centrale 2001)
    (a) Montrer que la relation :
$$\int_x^{f(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = 1$$
    définit une fonction f sur un certain intervalle $\Delta \subset]0,+\infty[$.
    (b) Étudier les limites de $f$aux bornes de Δ.
    (c) f est-elle prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle contenant Δ ?
39. (Centrale 2001) Pour $x > 1$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :
$$f_n(x) = \int_0^n \cos\left(t^x\right)\ \mathrm{d}t$$
Convergence simple de la suite (f_n) ? Si $a > 1$, convergence uniforme sur $[a,+\infty[$?

40. (CCP 99) Nature, suivant les valeurs de α, de la série de terme général :
$$u_n = n^{-\alpha} \int_0^n \frac{\operatorname{Arctg} x}{\sqrt{x}} \, dx$$
41. (ENS 2000) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbf{R})$ telle que f' soit bornée et que $\int_0^{\to+\infty} f(x)\,dx$ existe. Prouver que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
42. (X 98) Existence, pour $x \geq 0$, de :
$$g(x) = \lim_{X\to+\infty} \int_x^X \frac{\sin t}{t} \, dt \text{ ?}$$
Prouver que g est continue sur $[0,+\infty[$.
La fonction $X \mapsto \int_0^X g(x)\,dx$ a-t-elle une limite quand $X \to +\infty$?
43. (Mines 98) Pour $x > 0$, on pose :
$$\phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{t}$$
Existence et, éventuellement calcul de :
$$\int_0^{+\infty} \phi(x)\,dx$$
44. (Centrale 97 et 99) Soit $x \in]0,1[$, prouver l'existence d'un unique $y \in]0,1[$ tel que :
$$\int_x^1 \frac{\ln t}{t} \, dt = (1-x)\frac{\ln y}{y}$$
Continuité, dérivabilité, graphe de la fonction $\phi : x \mapsto y$.
45. existence et calcul de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$$
46. Calcul de
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$$

47. (X 99) a , $b > 0$, existence et calcul de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \, dt$$
et de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}(at) - \operatorname{Arctg}(bt)}{t} \, dt$$
(CCP 2000) Le même avec des th.
48. Soit f une application continue, croissante, intégrable de $]0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Trouver :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
49. (Centrale 2002) f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, décroissante, à valeurs positives et intégrable sur cet intervalle. Déterminer, après avoir établi la convergence de la série,
$$\lim_{h\to 0_+} h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$
50. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$
51. (CCP 99) Déterminer la limite des suites de termes généraux :
$$\sqrt[n]{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}$$
$$\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n}$$
52. (CCP 97) Existence de :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \, dt$$
Pour $x > 0$, on note $I(x)$ le reste de cette intégrale. Montrer que :
$$I(x) = \int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2} \, dt$$
En déduire I.

53. Cen 2000 (Maple) Etudier les racines $x > 1$ de la fonction :

$$x \mapsto \int_1^x \ln t \, \cos t \, \mathrm{d}t$$

On travaillera d'abord sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

54. (CCP 97) Montrer que, lorsque $x \to +\infty$:

$$\int_{\mathrm{e}}^x \ln(\ln t) \, \mathrm{d}t \sim x \ln(\ln x)$$

55. (Centrale 97) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbf{C})$ telle que f' soit intégrable. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si et seulement si la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{[x]} f(n)$$

admet une limite quand $x \to +\infty$.

56. (X 97) Calculer :

$$\lim_{X\to+\infty} X \exp\left(-\int_0^X \frac{4 \, \mathrm{d}x}{3 + \sqrt{x^2 + 8x}}\right)$$

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$, continue et telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x) = 1$$

La fonction $X \mapsto X \exp\left(-\int_0^X f(x) \, \mathrm{d}x\right)$ possède-t-elle une limite quand $X \to +\infty$?

57. (X 99) Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, continue, croissante, telle que $f(0) = 0$. On pose, pour $x \in [0, 1[$:

$$g(x) = (1 - x) \int_0^x \frac{f(t)}{(1 - t)^2} \, \mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.

   (b) Calculer $\int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x$.

   (c) Relever quelques propriétés de g à l'aide du cas particulier $f(x) = \frac{x}{2-x}$. Montrer que $g(1) = f(1)$.

   (d) Montrer que g est "plus régulière" que f et est convexe *[Difficile, n'a pas été demandé au candidat]*.

58. (X 97) Soient a, b avec $0 < a < b$. Existence de :

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$$

En utilisant le changement de variable :

$$u = \frac{ab - t^2}{2t}$$

Montrer que $I(a, b) = I\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$. Etudier les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a, b_0 = b$ et :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Exprimer $I(a, b)$ à l'aide de la limite commune à ces deux suites.

59. (Centrale 97) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$ et telle que f' soit intégrable. Prouver l'intégrabilité de $t \mapsto f(t) \sin t$. Etudier l'intégrabilité de :

$$t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}, \qquad t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t} - \sin t}$$

60. (Centrale 97) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels de somme nulle. Etudier :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to+\infty}} \int_x^y \sum_{k=1}^n a_k \cos(a_k t) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

61. (Mines 97) Soit f une fonction continue, 2π périodique, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour quelle (s) valeur (s) de β la suite :

$$I_n(\beta) = \int_1^n \frac{f(t) - \beta}{t} \, \mathrm{d}t$$

converge-t-elle ?

62. (CCP 97) Soit $p \in \mathbf{N}$, déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \sin\left(\frac{\cos(1/t)}{t^{p+1}}\right) \mathrm{d}t$$

63. (Cen 2000) Soit $f \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[,\mathbf{R})$, telle que,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x\,f'(x) = b$$

Montrer que $b = 0$.

64. (X 2000) Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{R})$.
    (a) On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, montrer que, quand $x \to +\infty$, $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim x$.
    (b) On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Montrer qu'existe $\epsilon \in \{-1,1\}$ tel que $f(x) \sim \frac{\epsilon}{\sqrt{2x}}$ quand $x \to +\infty$.
    (c) Soit $(a_n) \in]0,+\infty[^{\mathbf{N}}$ telle que $a_n \sum_{k=0}^n a_k \to 1$. Trouver un équivalent de (a_n).
65. (D'aprés ENS 97) Soit f une fonction convexe, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [0,+\infty[$, convexe et intégrable sur I.
    (a) Etudier les limites de f et f' au voisinage de $+\infty$.
    (b) Prouver qu'au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f'(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

66. (Mines 98) Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0,1],\mathbf{R})$. On suppose qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = o(x^\alpha) \quad \text{et} \quad f"(x) = o(x^{\alpha-2})$$

$(\alpha \in \mathbf{R})$. Montrer que $f'(x) = o(x^{\alpha-1})$.

67. (Mines 99) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ telle que $f > 0$ et $f' < 0$. On pose $h = f/f'$ et on suppose que, quand $x \to +\infty$ on a :

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \quad \text{et} \quad h'(x) = o(1)$$

6 novembre 2003

Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $f(x) \leq x^{-1/\epsilon}$ pour x assez grand, en déduire que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Montrer que, quand $x \to +\infty$:

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \sim -\frac{f^2(x)}{f'(x)}$$

68. (ENS 99) Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux sur $]0,T[$ et intégrable sur cet intervalle. Soient a, b deux réels avec $a < b$.
    (a) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(\lambda t)\,\mathrm{d}t$.
    (b) Soit g une fonction en escalier sur $[a,b]$, calculer :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b g(t)f(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

    (c) Même question avec g continue par morceaux sur $[a,b]$.
69. (ENS 99) Soit $x > 0$, montrer l'existence de

$$f(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$$

On pose $f(0) = 0$, étudier la continuité de f en 0, sa dérivabilité en 0 et la continuité de f' en 0.