Intégrales dépendant d'un paramètre

PC*2

11 janvier 2004

Exercice 1 (Mines 2003) *Équivalent de :*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Exercice 2 (Mines 2003) *Équivalent de :*

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{n^2}\right)}\ ?$$

Exercice 3 (CCP 99) *Calculer* $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 (Mines 2003) -

1. *Calculer* $L = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln\,\mathrm{d}t$.
2. *Calculer* $\int_0^1 t^n \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ *et en déduire une autre expression de* L.

Exercice 5 (Mines 2003) *Étudier*

$$I_n = \int_{-\sqrt{n}}^0 \left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 (Mines 2000) *Étudier l'intégrabilité, sur* $[0,+\infty[$, *de la fonction* f_n *définie par* $f_n(x) = \frac{n^{3/2}\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$. *Étudier le comportement asymptotique de la suite* $\int_{[0,+\infty[} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 (Centrale 2001) *Déterminer la limite, quand* $n\to\infty$ *de :*

$$\int_1^3 \frac{\ln^{2n} t - 1}{\ln^{2n} t + 1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8 (CCP 98) *Étudier la suite et série de terme général :*

$$\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 9 (Mines 99) *Étudier* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *avec :*

$$u_n = \int_0^1 (1-t^\alpha)^n\,\mathrm{d}t$$

Exercice 10 (TPE 2001) *Calculer* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *avec :*

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 11 (Mines 2001) *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$ *telle que* $f(1)\neq 0$. *Donner un équivalent de :*

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12 (X 99) *Existence de :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4\,|\sin x|^{3/2}}$$

Exercice 13 (Mines 2003) *Existence de* u_n, *convergence et somme des séries de termes généraux* a_n *et* $(-1)^n a_n$ *avec :*

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \quad \text{pour } n\geq 1$$

Exercice 14 (TPE 99 et 2000 Cen 2002) *Convergence et somme de :*

$$\sum_{n\geq 0} \int_0^1 (t-1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15 (CCP 99) *Existence et étude de la suite de terme général :*

$$u_n = \int_0^1 \frac{1-t^n}{\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16 (Mines 98) *Pour $n \geq 1$, on pose :*

$$I_n = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/n}\,\mathrm{d}x$$

Trouver les limites de (I_n) et de $(I_n^{1/n})$ quand $n \to \infty$.

Exercice 17 (Mines 99) *Ecrire l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$$

comme somme d'un série.

Exercice 18 (Centrale 99) *Définition, continuité, classe $\mathcal{C}^1$ de la somme f de la série de fonctions :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}}{n^2+t^2}$$

Étudier les variations de f et sa limite en $+\infty$; est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$?

Exercice 19 (Cen 98 et 2001) *On pose :*

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Donner une forme condensée de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ puis un équivalent simple de u_n.

Exercice 20 (Centrale 2001) *Existence et signe de :*

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 21 (Cen 98) *On pose :*

$$I_n = \int_0^1 \ln(1-t^n)\,\mathrm{d}t$$

Étudier la limite de (I_n) puis de (nI_n).

Exercice 22 (Mines 2003) *Nature de la suite (I_n) :*

$$I_n = \int_0^1 \ln\left(\cos\left(x^n\right)\right)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 23 (Cen 98 et Mines 2001) *Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{C})$ bornée. On pose :*

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Trouver $\lim_{n\to\infty} a_n$ et un équivalent si $f(0) \neq 0$.

Exercice 24 (Mines 98) *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ bornée. Trouver :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{n^2 t f(t)}{(1+n^3t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 25 (Cen 98) *Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{C})$ bornée. Trouver :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n n f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 26 (Mines 99 et 2003) *Soit $a \in]0,1]$. Montrer que, quand $n \to \infty$:*

$$\int_0^a (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbf{R})$ telle que $f(0)=1$, $f'(0)=0$ et $|f(x)|<1$ sur $]0,1]$. Donner un équivalent de :

$$\int_0^1 [f(x)]^n\,\mathrm{d}x$$

Exercice 27 (X 98) *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, nulle en dehors d'un segment. Déterminer :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} n f(x) \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n^3} \mathrm{d}x$$

Exercice 28 (X 2001) *Étudier la suite (u_n) de terme général :*

$$u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}{1+x^3} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$$

Exercice 29 (X 99) *Existence et limite de la suite (u_n) de terme général :*

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1 - \sqrt[3]{t}} \ln t \,\mathrm{d}t$$

Nature de $\sum_{n\geq 0} (-u_n)^\alpha$ suivant les valeurs de α.

Exercice 30 (Mines 98) *Montrer que :*

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{(-1)^k}{pk+1} \sim A n^{-1/p}$$

avec $A > 0$

Exercice 31 (Mines 99 et 2000) *Combien de fois la fonction f définie par :*

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) \,\mathrm{d}t$$

s'annule-t-elle sur $[\pi/2, \pi]$?

Exercice 32 *Soit $f \in C^0([0,1], \mathbf{R})$, on pose :*

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t) \,\mathrm{d}t$$

- *Déterminer $\lim u_n$. Equivalent de u_n si $f(1) \neq 0$.*
- *Mêmes questions avec $f(t) = (1-t)^{-\alpha}$ où $\alpha \in [0, 1[$.*
- *On suppose $f \geq 0$ et $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1-t}$ intégrable sur $[0, 1[$. Prouver que la série $\sum u_n$ converge.*

Exercice 33 (Mines 98) *Existence et limite de :*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n x \,\mathrm{e}^{-nx^2}}{\ln(1+x) + |\cos x|} \mathrm{d}x$$

Exercice 34 (Centrale 2001) - *On considère :*

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \mathrm{d}t$$

1. *Existence de cette intégrale ?*
2. *Exprimer I en fonction de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.*

Exercice 35 (Mines 2003) *Nature de la suite :*

$$I_n = \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1 + x + x^2 + .. + x^n} \;?$$

Exercice 36 (Centrale 2001) -

1. *Démontrer l'inégalité de la moyenne arithmético-géométrique.*
2. *On considère :*

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + x^2 + .. + x^{n-1}} \mathrm{d}x$$

   (a) *Étude de (u_n).*
   (b) *Convergence éventuelle de $\sum_{k\geq 1} u_k$?*
   (c) *(Une fois le reste fait) Équivalent de u_n ?*

Exercice 37 (Mines 98) *Calculer :*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \sin x \,\mathrm{d}x$$

Exercice 38 (Mines 98) *Limite et développement asymptotique à deux termes de :*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t} + t^{2n}} \mathrm{d}t$$

Exercice 39 (Mines 98 et 99) *Mêmes questions que le précédent avec :*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

Exercice 40 (Mines 2003) *Justifier l'existence de :*

$$\int_{\mathbf{R}_+} \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$$

et l'écrire comme somme d'une série.

Exercice 41 (Mines 98, Cen 2002) -

1. *Déterminer une relation de récurrence entre les intégrales :*

$$J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

2. *Nature de la série* $\sum_{n\geq 0} J_n$.
3. *Rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 0} J_n\, x^n$.
4. *Montrer que* $J_n \sim cn^{-1/2}$ *avec* $c > 0$.

Exercice 42 (ENS 99) *Soit* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, *nulle pour* $|t| > a > 0$. *Est-ce possible ? Déterminer la limite de :*

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt^3}\,\mathrm{d}t$$

[Intégrer judicieusement par parties.]

Exercice 43 (Mines 99) *Déterminer une fonction s telle que :*

$$I(h) = \int_0^h \frac{s'(x)}{\sqrt{h-x}}\,\mathrm{d}x$$

soit indépendante de h.

Exercice 44 *Convergence, suivant a, de la série de terme général :*

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^{(n^a)}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 45 *Nature de*

$$\int_0^{+\infty} |\sin x|^x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 46 *Trouver, quand* $n \to \infty$, *un équivalent de :*

$$I_n = \int_0^1 \sin(\pi t^n)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 47 *Continuité ? Limites en* 0 *et* $+\infty$ *de :*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y$$

Exercice 48 (Mines 99) *Pour* $|\alpha| \leq 1$, *on pose :*

$$f(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha\, x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Étudier la définition, la continuité, la dérivabilité de f. *Calculer* $f'(\alpha)$ *et vérifier qu'en* 1 f *n'est pas dérivable.*

Exercice 49 (X 2001) *Étudier la fonction F définie par :*

$$x \mapsto \int_0^{\pi/2} \arctan(x\,\tan t)\,\mathrm{d}t$$

D'éfinition, continuité, calcul de f' *?*

Exercice 50 (Mines 2001) *Domaine de définition de :*

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(x^2 + \tan^2\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\ ?$$

Calculer f.

Exercice 51 (Centrale 2002) -

1. *Déterminer le domaine de définition et de continuité de :*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. *Calculer F.*

Exercice 52 *Soit $f(x)=\int_0^1 \ln(1-x\cos t)\,\mathrm{d}t$. Définition de f ? Continuité ? Limites aux bornes ?*

Exercice 53 (Cen 2000) *Domaine de définition et continuité de :*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}}\cos t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 54 (Mines 99) *Définition et classe de :*

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

Trouver une équation différentielle vérifiée par F et, en admettant la valeur de l'intégrale de Gauss, calculer F.

Exercice 55 (X 97 et 2001) *Soit $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, continue, croissante, positive. Montrer qu'il existe $h\geq f$ continue et convexe telle que :*

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x\leq 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 56 (X 2001) *Trouver le domaine de définition de la fonction définie par la relation :*

$$I(a)=\int_0^1\frac{t^{a-1}-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

Étudier la dérivabilité de I et expliciter $I(a)$.

Exercice 57 (Esim 2000) *Prouver l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty}\ln(\operatorname{th}x)\,\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\int_0^1\frac{t^2\,\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Calcul exact de l'intégrale ?

Exercice 58 (Cen 98 et Mines 2000) *Pour $x\geq 0$, écrire l'intégrale suivante comme somme d'une série :*

$$I(x)=\int_0^1 t^x\ln t\,\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire un équivalent de $I(x)$ quand $x\to+\infty$.

Exercice 59 *Pour $0\leq x\leq\pi$, on pose :*

$$f_n(x)=\int_0^x t^n\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

Étudier la convergence de la suite (f_n) et trouver un équivalent de $f_n(x)$ quand $n\to+\infty$ (traiter à part le cas $x=\pi/2$).

Exercice 60 *Soit f continue, positive sur $[a,b]$. Déterminer :*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 61 *Prouver l'intégrabilité de $x\mapsto\ln(\sin x)(\sin x)^n$ sur $[0,\frac{\pi}{2}[$. On pose :*

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)(\sin x)^n\,\mathrm{d}x$$

Prouver que :

$$\sum_0^{\infty}I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{1-\sin x}$$

Exercice 62 (Cen 2003) *Prouver, pour $x\in\mathbf{R}$, l'égalité :*

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos xt}{\operatorname{ch}t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$$

Exercice 63 (X 98 et CCP 2003) *Domaine de définition D de :*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ à l'intérieur de D. Calculer f et en déduire la valeur de $\int_0^{\to+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 64 (X 2003) *Étudier le comportement, quand $x\to 0_+$ de :*

$$\int_0^1\frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{(at)^2+x^2}$$

En déduire le comportement, quand $r\to 1_-$ de :

$$\int_0^{\pi}\frac{t^\alpha(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{1-2r\cos t+r^2}$$

Exercice 65 (Centrale 2001) *Montrer que F définie par :*

$$F(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\,x\,t}}{\operatorname{ch} t}\,dt$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$. Quel est le rayon de convergence de la série ?

Exercice 66 (CCP 2003) *Domaine de définition de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,t}{\sqrt[4]{\operatorname{sh} t}}\,dt\ ?$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ resp développable en série entière sur des intervalles à préciser.

Exercice 67 (X 2001) *Existence et calcul de :*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,t}{(\operatorname{ch} t)^{1/3}}\,dt$$

[Indication : décomposer $(\operatorname{ch} t)^{-1/3}$ en série entière de e^{-t}].

Exercice 68 (Centrale 2001, Mines 2002) *:*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{1-\cos(x\,t)}{t^2}\,dt$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle à préciser et l'exprimer à l'aide de fonctions classiques.

Exercice 69

1. *x est un paramètre réel positif, on pose :*

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\,dt$$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

2. *Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$*
3. *Montrer que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $nf(n)f(n-1)$ est une constante que l'on calculera ; en déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.*
4. *que dire de $xf(x)f(x-1)$ pour $x \in [1,+\infty[$?*

5. *f est elle continue sur $\mathbf{R}_+$?*

Exercice 70 (Centrale 2001) *Soit $f : [0,a] \to \mathbf{C}$, continue par morceaux, trouver :*

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^a \frac{h\,f(x)}{h^2+x^2}\,dx$$

Exercice 71

1. *Soit f continue, T-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, g continue de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que :*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(xt)g(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \int_a^b g(t)\,dt$$

2. *Trouver un équivalent, quand $n \to \infty$ de :*

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\frac{u}{2}} \right| du$$

3. *En déduire un équivalent, quand $n \to \infty$ de :*

$$K_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right| du$$

On pourra introduire la fonction $g(u) = \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{2}{u}$ et utiliser les questions précédentes

Exercice 72 (Cen 98) *Limite et équivalent quand $a \to +\infty$ de :*

$$I(a) = \int_0^1 \frac{dt}{t^3+a^3}$$

Exercice 73 (Cen 2000 et 2001) *Pour $x > 0$, on pose :*

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,dt$$

Étudier la définition et la continuité de f sur $]0,+\infty[$, les limites et des équivalents aux bornes de cet intervalle.

Exercice 74 (Mines 2000) *Soit ϕ une fonction continue et intégrable sur* $\mathbf{R}$ *et ψ définie par :*

$$(x,y) \mapsto \left(\cos^2 \frac{x}{\sqrt{y}}\right)^y \phi(x)$$

Montrer que, pour $y > 0$, $x \mapsto \psi(x,y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. *Étudier les limites en 0_+ et $+\infty$ de $f : y \mapsto \int_{\mathbf{R}} \psi(x,y)\,\mathrm{d}x$.*

Exercice 75 (Mines 3003) *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, continue : déterminer :*

$$\lim_{x\to a} \int_a^x \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(x-t)}}$$

Exercice 76 (Mines 98) *Déterminer :*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon^2}^{\epsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1+t)(\epsilon^2+\epsilon-t)}}$$

Exercice 77 (Mines 98 et Cen 2003) *Existence, continuité, limites et équivalents en 0 et $+\infty$ de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(t^2+x^2)}}$$

Exercice 78 (Centrale 2003) *Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer qu'on peut définir une fonction f_λ sur $]0,+\infty[$ par :*

$$f_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(\lambda t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t$$

et qu'elle y vérifie l'équation différentielle :

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2+\lambda^2)y(x) = 0$$

Trouver la limite de f_λ en 0.

Exercice 79 (Enstim 2001) *Montrer que la fonction f :*

$$x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

vérifie l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0$$

Trouver un équivalent de f en $+\infty$. Démontrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le rayon de la série correspondante.

Exercice 80 (Cen 98) *Domaine de définition de f :*

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

f est-t-elle continue ? De classe $\mathcal{C}^1$? Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 81 (Mines 2000) *Définition, continuité, dérivabilité de :*

$$F(x) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Expression de F en supposant connue l'intégrale de Gauss.

Exercice 82 (Mines 98) *Calculer :*

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 83 (ENS 2000) *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, intégrable sur $\mathbf{R}$. On pose :*

$$\phi(x) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ϕ est-elle définie et continue sur $\mathbf{R}$? Calculer, pour $a<b$:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \phi(x)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\,x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,b\,x}}{\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 84 (Mines 98) *Définition, continuité, dérivabilité de :*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(t^2-2t\cos x+1)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Expliciter f.

Exercice 85 (Mines 2001) *On définit une fonction F par :*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. *Définition et continuité de F ?*
2. *Dérivabilité de F ?*
3. *F admet-elle une limite en $+\infty$?*
4. *F est-elle dérivable en 0 ?*

Exercice 86 (Cen 98) *Étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

En déduire $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 87 (Cen 98) *Domaine de définition de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan tx}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

f est-t-elle continue, $\mathcal{C}^1$? Calculer $f'(x)$, en déduire $f(x)$. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$$

Exercice 88 *Pour $x > 0$, on pose :*

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x\cos^2 t}} \qquad g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x\cos^2 t}}$$

1. *Justifier leur existence et calculer $g(x)$.*
2. *On pose $h = f - g$. Montrer que, quand x tend vers 0, $h(x)$ admet une limite que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.*
3. *Donner un développement asymptotique à deux termes de $f(x)$ au voisinage de 0.*

11 janvier 2004

Exercice 89 (Mines 98 et 2001) *Montrer que la fonction f :*

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$. Calculer les coefficients de son développement puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 90 *Soit $x > -1$; définition, continuité de :*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe C^1, calculer f.

Exercice 91 (5/2) *Développer en série de Fourier la fonction f_a de période 2π telle que, pour $-\pi \leq x \leq \pi$:*

$$f_a(x) = \operatorname{ch} ax$$

En déduire, pour tout réel a, la valeur de :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 92 *Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$, à valeurs > 0. On pose :*

$$I(x) = \left(\int_0^1 (f(t))^x\,\mathrm{d}t\right)^{1/x}$$

Étudier sa continuité sur $]0,+\infty[$ et ses limites quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$.

Exercice 93 (X 98, Ccp 2001) *Définition, continuité, calcul de $f'(x)$ et de $f(x)$ pour :*

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 94 (ESPCI 2001) *Étudier la fonction f définie par :*

$$f(t) = \int_0^{\pi} (x\sin x)^t\,\mathrm{d}x$$

Exercice 95 (X 98) *Définition, classe, développement en série entière au voisinage de* 0*, calcul de :*

$$I_n(a) = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 96 *Trouver un équivalent quand* $t \to +\infty$ *de :*

$$\phi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{tx^2\,\mathrm{e}^{-xt}}{(1-\mathrm{e}^{-xt})^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 97 *Donner un équivalent, quand* $n \to \infty$ *de :*

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 98 *Prouver, pour* $x > 0$*, l'existence de l'intégrale :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{xt + \mathrm{e}^{tx^2}}$$

1. *Démontrer que :*
$$f(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \text{avec } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u + x\,\mathrm{e}^u}$$
2. *Prouver que :*
$$\int_0^2 \frac{du}{u + x\,\mathrm{e}^u} \sim \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$
quand x *est au voisinage de zero.*
3. *Etablir que :*
$$h(x) = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u + x\,\mathrm{e}^u} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(\phi(t)-1)(x+t)}$$
où ϕ *est la fonction réciproque de* $u \mapsto u\,\mathrm{e}^{-u}$ *sur* $[2, +\infty[$ *et* $a = 2\,\mathrm{e}^{-2}$.
4. *En déduire que* $h(x) = o\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ *quand* x *est au voisinage de zero et un équivalent simple de* f.

Exercice 99 *Soit :*

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que ϕ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *et* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$*. Calculer* $\phi + \phi$"*. Prouver que, pour* $x > 0$ *:*

$$\phi(x) = \int_x^{\to +\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$$

En déduire que :

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 100 (X) *Soit* $f \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbf{R})$*, intégrable. On pose :*

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(xy)\,\mathrm{e}^{-2xy}\,f(y)\,\mathrm{d}y$$

Domaine de définition et de continuité de h*. Calculer :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 101 (Cen 98) *Montrer que, pour* $x > 0$*, l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

existe ; soit $f(x)$ *sa valeur. Trouver un équivalent de* $f(x)$ *quand* x *est au voisinage de* $+\infty$ *puis de* 0^+.

Exercice 102 $p \in \mathbf{N}^*, \alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

$$J(p, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+\alpha^2)^p}$$

1. *Calculer, pour* α *fixé,* $\lim\limits_{p \to \infty} J(p, \alpha)$.
2. *Partie principale de* $J(p, \alpha)$ *quand* $\alpha \to 0^+$ *?*
3. *Partie principale de* $J(p, \alpha)$ *quand* $\alpha \to +\infty$ *?*

Exercice 103 *On pose, pour $a > 0$:*

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^4 x + a^4}}$$

Limite et équivalent de $J(a)$ quand a tend vers 0 ?

Exercice 104 *Nature de la série de terme général :*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

Exercice 105 *Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose :*

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2(xt)}\,\mathrm{d}t$$

1. *Calculer $f(1)$. Comment pourrait on calculer $f(n)$, $n \in \mathbf{Z}$.*
2. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.*
3. *Donner un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.*
4. *Étudier le comportement de f quand $x \to +\infty$.*

Exercice 106 (X 2000 et 2002) *Définition et continuité de*

$$\int_0^{\to+\infty} \cos\left(t^x\right)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 107 (X 98) *Pour $\alpha > 0$, on pose :*

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\operatorname{sh}^\alpha t + x \operatorname{ch}^\alpha t)^{1/\alpha}}$$

Déterminer le domaine de définition de $I(x)$ et un équivalent quand $x \to 0^+$.

Exercice 108 (Mines 98) *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, intégrable sur $\mathbf{R}$. On suppose que :*

$$\exists M > 0 \,/\, \forall x > 0 \quad \int_{\mathbf{R}} |\,\mathrm{e}^{itx} - 1||f(t)|\,\mathrm{d}t \leq Mx$$

Montrer que l'application $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et déterminer :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{itx} - 1}{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 109 *Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et :*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u_n \sin t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 110 *Exprimer, à l'aide des :*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

L'intégrale :

$$\int_0^1 \arctan t \, \ln\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 111 *Existence de :*

$$f(x) = \int_0^{\to+\infty} \frac{t\sin xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Continuité de f, comportement de f au voisinage de 0 et $+\infty$.

Exercice 112 (Cen 98) *Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

Exprimer $f(x)$ à l'aide d'une intégrale pour $x > 0$. Trouver un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 113 (Difficile) *Prouver que, lorsque $x \to 0_+$:*

$$f(x) = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

En déduire un équivalent, lorsque $x \to 1_-$ de :

$$S(x) = \sum_2^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$$

Exercice 114 (Mines 2002) *Soient k, n des entiers naturels non nuls. On note $r_{k,n}$ le reste de la division euclidienne de n par k. Déterminer :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_{1,n} + r_{2,n} + \cdots + r_{n,n}}{n^2}$$

Exercice 115

1. *Soit $f \in C^\infty(\mathbf{R}, E)$, où E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé de dimension finie, telle que :*

   $$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(p-1)}(0) = 0$$

   Pour $x \neq 0$, écrire la fonction ϕ définie par $\phi(x) = \frac{f(x)}{x^p}$ sous la forme :

   $$\phi(x) = \int_0^1 g(u) f^{(p)}(xu) du$$

   Où g est une fonction numérique à préciser.
2. *Démontrer que ϕ, convenablement prolongée en 0, est de classe C^∞.*
3. *On suppose $||f^{p+n}||$ bornée par M sur un intervalle I contenant 0. Montrer que :*

   $$\forall x \in I \ , \ ||\phi^{(n)}(x)|| \leq \gamma_{n,p} M$$

   Où $\gamma_{n,p}$ est un rationnel à exprimer en fonction de n et p.
4. *Soit Δ une forme linéaire sur le $\mathbf{C}$ espace vectoriel $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telle que :*

   $$\forall f, g \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \ , \ \Delta(fg) = f(0)\Delta(g) + g(0)\Delta(f)$$

   Déterminer $\Delta(f)$, en commençant par le cas où $f(0) = f'(0) = 0$.