Intégrale sur un segment, primitives

PC*2

6 novembre 2003

1 Calcul d'intégrales sur un segment et de primitives

1. (Centrale 97) Calculer $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$.
2. Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3} & \displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} \\
\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x-x^2)^{3/2}} & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^{20}+1}} \\
\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x & \displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x \\
\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+\cos 3x} \\
\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x}\,\mathrm{d}x & \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(-2x^2+x+1)^{3/2}} \\
\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x-\cosh a}
\end{array}$$

3. Calculer les intégrales :

$$\begin{array}{lll}
\int_0^1 x^\alpha(\ln x)^n\,\mathrm{d}x & \alpha>0\ ,\ n\in\mathbf{N} & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\sin^2 x+\frac{1}{4}} \\
\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x+\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x & \displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}} & \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} \\
\int_0^{\pi/8} \mathrm{e}^{-2x}\cos^2 x\,\mathrm{d}x & \int_0^{\pi/8} \mathrm{e}^{-2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x & \displaystyle\int_{1/2}^{5/4} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-x^2}}
\end{array}$$

4. (Centrale 2001) Calculer :
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+2}$$
5. (X 2000) Calculer
$$\int_0^{3\pi} \sin x\,\sin 2x\,\sin 3x\,\mathrm{d}x$$
6. (Cen 99) Calculer :
$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}}$$
7. (CCP 99) Calculer
$$\int_0^1 \arctan\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
8. (CCP 99) Calculer :
$$\int_0^2 \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$
9. (CCP 99) Existence et valeur de :
$$\int_0^{\pi/4} \cos x\,\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$$
10. (CCP 98) Calculer
$$\int_0^{\pi/4} \arctan\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
11. (CCP 98) Calculer :
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$$
12. (CCP 98) Calculer :
$$\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{sh}^2\,x}{\mathrm{ch}^5\,x}\,\mathrm{d}x$$

13. (CCP 98) Relation de récurrence permettant le calcul de :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$$

14. (Mines 99) Primitives de $x \mapsto \sqrt{1+\sin(2x)}$?
15. (CCP 99) Relation de récurrence permettant le calcul de :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$$

Calculer I_0 et I_1.
16. (CCP 2000) Calculer, en formant $I_{n+1} - I_n$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nt}{\tan t}\,\mathrm{d}t$$

17. (Mines 98) Calculer :

$$\int_0^1 (-1)^{[nt]}(-1)^{[mt]}\,\mathrm{d}t$$

18. (ENSEA 2003) soit $f : [0,a] \to \mathbf{R}$, continue et à valeurs strictement positives. Calculer $\int_0^a \frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}\,\mathrm{d}t$.
19. (TPE 2003) Domaine de définition, parité et calcul de $f(x) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{x-\cos t}$.
20. Soit $a \in]0,\pi[$, établir une relation de récurrence linéaire entre trois termes consécutifs de la suite :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx - \cos na}{\cos x - \cos a}\,\mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de I_n.
21. (ENS 2000) Calculer :

$$\int\int\ldots\int_{0\le x_1\le x_2\cdots\le x_n\le 1} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$$

22. Montrer que, quand $n \to \infty$, le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ se concentre entre les deux tropiques.

2 Sommes de Riemann

23. Trouver un développement asymptotique à deux termes de la suite

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

24. (Cen 99) Développement asymptotique à deux termes de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$$

25. (Cen 2002) Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$$

26. (CCP 2003) Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

avec $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.
27. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbf{R})$. Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

28. Trouver les limites des suites :

$$\begin{array}{ll}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) & \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{k}{n^2}} \\
\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n+1}\ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) \\
n\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{n+k}\right) & \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(n^2+k^2)^p}\ ,\ p\in\mathbf{N}^*
\end{array}$$

29. (X97, CCP 2001 et 2003, ENSL 2001) Soit $r \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$; calculer en utilisant les sommes de Riemann, l'intégrale :

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x$$

Retrouver ce résultat en comparant $I(r)$ et $I\left(\frac{1}{r}\right)$ puis $I(r)$ et $I(r^2)$.

30. Trouver un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

On en retranchera une somme judicieuse de manière à faire apparaitre une somme de Riemann

31. (Mines 2002) Soient k, n des entiers naturels non nuls. On note $r_{k,n}$ le reste de la division euclidienne de n par k. Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_{1,n} + r_{2,n} + \cdots + r_{n,n}}{n^2}$$

3 Exercices généraux

32. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbf{C}$ telle que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$. En commençant par l'étude du cas où $\int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, montrer qu'il existe un réel θ tel que $f = \mathrm{e}^{i\theta}\,|f|$.

33. (X, CCP 2003) soient f et g, continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles strictement positives. On pose :

$$I_n = \int_0^1 f(t)^n g(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $I_n > 0$ et $I_n^2 \leq I_{n-1}I_{n+1}$.

(b) Soit $u_n = \frac{I_n}{I_{n-1}}$. Prouver que (u_n) converge vers une limite $l > 0$.

(c) (X) Déterminer l.

34. (Mines 99, X 2001, X 2002, Cen 2003) Si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on pose :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Étudier le comportement de f quand x est au voisinage de 1. f se prolonge-t-elle en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$?

35. (Centrale 2001) Déterminer :

$$\lim_{x\to 0_+} \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } 0 < a < b$$

36. (CCP 2002) Soit $f \in C^0([a, b], \mathbf{R})$; on suppose que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}\ ,\ \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

montrer que f admet au moins n zéros dans $]a, b[$. *On montrera qu'elle en admet au mois un puis, en supposant qu'elle en admet $p < n$, soient $t_1 < t_2 < \cdots < t_p$, on considérera $\int_a^b \prod_{i\in I}(t - t_i) f(t)\,\mathrm{d}t$, où I est une partie bien choisie de $\{1, 2, \ldots, p\}$*

37. (a) $0 < a < b < 1$, prouver l'existence d'un trinôme $T \in \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in]a, b[\ ,\ T(x) > 1 \qquad \forall x \in [0, a] \cup [b, 1]\ ,\ 0 \leq T(x) \leq 1$$

(b) Prouver que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 T(x)^n\,\mathrm{d}x = +\infty$

(c) En déduire que, si f est une fonction numérique continue sur $[0, 1]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}\ ,\ \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

alors f est nulle. Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Weierstrass.

38. Nature, selon $\alpha > 0$, de la série de terme général :

$$\int_0^{(-1)^n n^{-\alpha}} \frac{\sqrt{|x|}}{1 + x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$$

39. (X97, X2001) Étudier la limite de la suite (I_n) :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x$$

(CCP 2000) Soit $f \in \mathcal{C}([0,\pi],\mathbf{R})$, trouver :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x$$

40. (Cen 2000) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue par morceaux et T-périodique. Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

41. Pour $n \geq 1$ et x réel, on pose :

$$P_n(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n) \qquad f_n(x) = \frac{P'_n(x)}{P_n(x)}$$

(a) Montrer que l'équation $P'_n(x) = 0$ admet une solution $x_n \in]0,1[$.

(b) Montrer que $\lim x_n = 0$.

(c) Montrer que x_n admet un développement asymptotique du type :

$$x_n = \frac{a}{\ln n} + \frac{b}{\ln^2 n} + o\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)$$

a et b constantes à déterminer.

(d) Soit $a > 1$ un réel ; trouver $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(na)$

(e) Soit λ un réel strictement positif donné, montrer que l'équation $f_n(x) = \lambda$ admet une solution $t_n \in]n,+\infty[$ et trouver un équivalent de t_n quand n tend vers l'infini

42. Soit $f \in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R}\,,\ \int_x^{x+1} f"(t)^2\,\mathrm{d}t \leq M$$

Montrer que si f admet une limite finie au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

43. (Théorème de Hardy-Landau) Soit f une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles ou complexes. On suppose que, quand $x \to +\infty$:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = o(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *[On appliquera la formule de Taylor avec reste intégral à $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ entre x et $x + h\,x$ où h est bien choisi].*

(X 99) En déduire un résultat analogue sur les suites.

44. (ENS 98 et 2003) Une suite (u_n), à valeurs dans $[0,1]$ est dite équirépartie si, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_0) + f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n+1} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Prouver que (u_n) est équirépartie si et seulement si, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in \{0,\dots,n\}/u_k \leq x\}}{n+1} = x$$

Prouver l'équirépartition de (u_n) avec $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$.

4 Inégalités

45. (Cen 99) Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{R})$ à valeurs positives, strictement croissante. On suppose que $f(0) = 0$, démontrer que pour tout couple (x,y) de réels positifs :

$$xy \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

46. Soit $f \in C^1([0,1],\mathbf{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall t \in [0,1]\ ,\ 0 < f'(t) \leq 1$. Prouver que :

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(t)\,\mathrm{d}t$$

47. Déterminer deux réels positifs A et B tels que, pour toute fonction numérique f de classe C^1 sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$|f(x)| \leq A \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t + B \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

48. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe C^1 avec $f(a) = g(a) = 0$. Montrer l'inégalité :

$$\int_a^b |(fg)'(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f'(x)| \,\mathrm{d}x \int_a^b |g'(x)| \,\mathrm{d}x$$

étudier le cas d'égalité.

49. (Mines 2002) Soit $f \in C^1([0,a], \mathbf{R})$ où $a > 0$; on suppose $f(0) = 0$. En commençant par étudier le cas où $f' \geq 0$, établir l'inégalité :

$$\int_0^a |f(x)f'(x)| \,\mathrm{d}x \leq \frac{a}{2} \int_0^a f'(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

50. (Cen 2003) Si f est continue de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, démontrer l'inégalité :

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathrm{e}^{f(x)} \,\mathrm{d}x$$

Généraliser.

51. Soit $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbf{R})\ ,\ f(0) = 0\ ,\ f(1) = 1\}$ Montrer que :

$$\inf_{f \in E} \int_0^1 |f'(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

52. (Cen 2002) Soit :

$$A = \left\{ \frac{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t},\ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}),\ f \geq 0,\ f \neq 0 \right\}$$

Montrer que A est borné. Déterminer ses bornes m et M et prouver que $A =]m, M[$.