L'INTÉGRALE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX SUR UN INTERVALLE

PC*2

20 octobre 2002

Introduction et conventions

Dans tout ce cours, la lettre I désigne un intervalle quelconque non réduit à un point et la lettre J un segment. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Table des matières

Chapitre 1

L'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment

1.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur un segment

On est prié de consulter le cours "Dérivées des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, complexes ou vectorielles" dont on reprend quelques grandes lignes.

Définition 1 (Continuité par morceaux sur un segment). Une fonction f, définie sur un segment $[a, b]$, est dite *continue par morceaux sur* $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ de $[a, b]$ telle que : pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe une application f_i, définie et continue sur **le segment** $[t_{i-1}, t_i]$ et vérifiant :

$$\boxed{f_{i|]t_{i-1},t_i[} = f_{|]t_{i-1},t_i[} \quad ie \quad \forall t \in]t_{i-1}, t_i[,\ f_i(t) = f(t)}$$

Une telle subdivision σ est dite **adaptée à** f.

Remarque 1. On verra que la valeur de f aux points t_i n'importe pas contrairement aux limites latérales de f aux points t_i qu'on note :

$$\boxed{f(t_i + 0) = \lim_{t \to t_i^+} f(t) = f_{i+1}(t_i) \quad \text{pour } i < n}$$

$$\boxed{f(t_i - 0) = \lim_{t \to t_i^-} f(t) = f_i(t_i) \quad \text{pour } i > 0}$$

En tout autre point de $[a, b]$, f est continue.

Définition 2 (Classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux). Même définition en imposant aux f_i d'être de classe $\mathcal{C}^n$.

Définition 3 (Dérivée généralisée d'une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$. $\sigma = (t_i)_{0 \le i \le n}$ une subdivision adaptée à f et les f_i comme ci-dessus. La fonction f est dérivable en tout point $t \in [a, b]$ **différent des** t_i et la fonction f', définie sur $[a, b] - \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ en lui affectant des valeurs arbitraires aux points t_i. On appelera donc **dérivée généralisée de la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur** $[a, b]$ toute application g continue par morceaux sur $[a, b]$ telle qu'existe une subdivision $\sigma = (t_i)_{0 \le i \le n}$, adaptée à f vérifiant :

$$\boxed{\forall t \in [a, b] - \{t_0, t_1, \ldots, t_n\},\ g(t) = f'(t)}$$

bien qu'elle ne soit pas unique une telle application sera notée $\mathrm{D}\, f$**. Il importe de remarquer quelle coïncide avec f' sauf sur un sous ensemble fini de** $[a, b]$ **où elle peut prendre des valeurs parfaitement arbitraires**. On définit de façon analogue $\mathrm{D}^n f$ pour f de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $[a, b]$.

Exemple 1 *(Comprendre le caractère $\mathcal{C}^n$ par morceaux).* Considérons la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(x) = |x|$$

Elle est continue sur $[-1, 1]$; montrons qu'elle est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur cet intervalle : la subdivision $\sigma = (-1, 0, 1)$ est adaptée à f car les applications :

$$f_1 : [-1, 0] \to \mathbf{R} \qquad x \mapsto -x$$
$$f_2 : [0, 1] \to \mathbf{R} \qquad x \mapsto x$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ respectivement sur les segments $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ et que :

$$\forall x \in]-1, 0[,\ f(x) = f_1(x)$$

$$\forall x \in]0, 1[,\ f(x) = f_2(x)$$

On peut alors, par exemple, définir $\mathrm{D}\, f$ par :

$$\mathrm{D}\, f(x) = \begin{cases} 10000 & \text{si } x = -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \pi & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -104 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Il vient alors que f est dérivable en tout point de $]-1,0[\cup]0,1[= [-1,1]-\{-1,0,1\}$ et qu'en un tel point x : $f'(x) = \mathrm{D}\, f(x)$. En les points -1, 0, 1, la valeur de $\mathrm{D}\, f(x)$ est parfaitement arbitraire. Bien sûr, on prouve sans changement que f est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $[-1,1]$ puisque f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On rappelle enfin le résultat suivant qui est très utile pour rédiger rapidement la preuve du caractère $\mathcal{C}^n$ par morceaux :

Proposition 1 (Le prouver rapidement). *Soit $f : [a,c] \to \mathbf{K}$ et $a < b < c$. f est de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $[a,c]$ si et seulement si ses restrictions aux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ le sont. Au surplus, si $]\alpha,\beta[$ est un sous intervalle ouvert de $[a,b]$ sur lequel la restriction de f est de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \geq 1)$ alors on peut imposer :*

$$\boxed{\forall x \in]\alpha,\beta[,\ \forall j \in [|1,n|],\ \mathrm{D}^j\, f(x) = f^{(j)}(x)}$$

Exemple 2 (Retour sur l'exemple précédent). Reprenons $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$:

$$f_{|[-1,0]} \text{ est l'application } x \mapsto -x \text{ qui est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [-1,0]$$

$$f_{|[0,1]} \text{ est l'application } x \mapsto x \text{ qui est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0,1]$$

Donc, d'après la proposition précédente, f est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $[-1,1]$. De plus $f_{|]-1,0[}$ et $f_{|]0,1[}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ respectivement sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ donc on peut imposer :

$$\mathrm{D}\, f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x \in]-1,0[\\ 1 & \text{pour } x \in]-1,0[\end{cases}$$

et des valeurs arbitraires en les autres points de $[-1,1]$.

1.2 Révision du cours de première année sur l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment

Elle a été vue en première année. On se contentera ici d'un résumé succint et d'un rappel des propriétés les plus importantes. On suppose connue l'intégrale des applications en escalier sur $[a,b]$ à valeurs complexes et ses propriétés. On notera $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbf{K}$; s'il n'y a pas d'ambiguïté on le notera simplement $\mathcal{E}$.

Définition 4. Soit f une application continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs réelles. Si $\epsilon > 0$ il existe deux applications ϕ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que :

$$\boxed{\phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \forall x \in [a,b],\ 0 \leq \psi(x) - \phi(x) < \epsilon}$$

Il vient alors :

$$\boxed{\sup_{\substack{\phi\in\mathcal{E}\\ \phi\leq f}} \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{\substack{\psi\in\mathcal{E}\\ \psi\geq f}} \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x}$$

Cette borne commune est alors notée $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Soit f une application continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs complexes. Les applications $g = \operatorname{Re} f$ et $h = \operatorname{Im} f$ sont continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles ce qui autorise à poser :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x}$$

On vérifie la cohérence de la notation et l'on dispose du théorème suivant, non vu en première année, mais qui permet d'obtenir très rapidement les propriétés de l'intégrale des applications continues par morceaux sur un segment à valeurs complexes à partir des propriétés correspondantes des applications en escalier.

Théorème 1. *Soit f une des application continue par morceaux d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$ alors :*

a) *f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite d'applications en escalier sur $[a,b]$.*

b) *Pour toute suite (f_n) d'applications en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ on a :*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Démonstration. On se limite au cas des fonctions à valeurs réelles. Le cas complexe s'en déduit immédiatement par passage aux parties réelles et imaginaires.

Preuve de a) : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Si $n \in \mathbf{N}$, il existe deux applications ϕ_n et ψ_n appartenant à $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ telles que :

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } 0 \leq \psi_n - \phi_n \leq \frac{1}{n+1}$$

d'où il découle, en notant $||\ \ ||_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications bornées de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, que :

$$\forall x \in [a,b],\ 0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \text{ d'où } ||f-\phi_n||_\infty \leq \frac{1}{n+1}$$

Preuve de b) : Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$. À partir d'un certain rang n_0 on a :

$$||f_n - f||_\infty < \frac{\epsilon}{b-a} \text{ donc } \forall x \in [a,b],\ f_n(x)-\epsilon < f(x) < f_n(x)+\frac{\epsilon}{b-a}$$

Mais la fonction $\phi_n = f_n - \epsilon/(b-a)$ *resp* $\psi_n = f_n + \epsilon/(b-a)$ est en escalier sur $[a,b]$ et, d'après la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier sur $[a,b]$, son intégrale vaut $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon$ *resp* $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + \epsilon$ donc, d'après la définition de l'intégrale de f sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + \epsilon$$

et donc :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \epsilon$$

□

Proposition 2 (Linéarité de l'intégrale). *L'application $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme $\mathbf{K}$-linéaire sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$.*

Démonstration. Découles de la linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{K})$ et du théorème 1. □

Définition 5 (Cas d'un ensemble fini exceptionnel). Si deux fonctions f et g, continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbf{K}$, coïncident sur le complémentaire d'une partie finie F de $[a,b]$, leurs intégrales coïncident.
Il s'ensuit que, si f est une application de $[a,b]-F$ dans $\mathbf{K}$ qui admet un prolongement g continu par morceaux sur $[a,b]$, on peut convenir que :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

puisque tout autre prolongement de f à $[a,b]$ y est continu par morceaux et de même intégrale que g.

Démonstration. Si f et g différent, au plus, sur F, $h = f - g$ est en escalier d'intégrale nulle donc $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$. □

Exemple 3. La fonction définie sur $]0,\pi[\cup]\pi,2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x(x-\pi)}$$

Se prolonge à $[0,2\pi]$ en une fonction continue (notée ici $\tilde{f}$ mais, en pratique, notée encore f) en posant : $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\pi) = -\frac{1}{\pi}$. On posera alors :

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x(x-\pi)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 3 (Positivité, croissance). *Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Si f est **positive et continue** *sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle, elle est nulle.*

Démonstration. La positivité de l'intégrale d'une fonction positive découle de la définition 4 ; la linéarité de l'intégrale assure sa croissance.
La stricte positivité de l'intégrale d'une fonction continue telle qu'existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$ provient de ce qu'on peut minorer f par une fonction en escalier d'intégrale strictement positive sur $[a, b]$ (voir cours de première année pour les détails et surtout les dessins). □

Proposition 4 (Inégalités importantes). *Soient f et g, continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbf{K}$, alors :*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x}}$$

Démonstration. La première peut, par exemple, s'obtenir par passage à la limite *via* le théorème 1. La deuxième a été vue en première année, elle est admise pour l'instant et sera démontrée dans le cours sur les espaces préhilbertiens. □

Exercice 1. Montrer que, si f est continue et si la première inégalité est une égalité alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,|f(x)|$$

Proposition 5 (Relation de Chasles). *Soit f une application de $[a, c]$ dans $\mathbf{K}$ et b tel que $a < b < c$. Alors f est continue par morceaux sur $[a, c]$ si et seulement si elle l'est sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ et, dans ce cas :*

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Remarque 2. On verra dans la section suivante l'intérêt de cette relation pour calculer explicitement des intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment.

1.3 L'intégrale fonction d'une borne

1.3.1 Continuité par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition 6. Une application f d'un intervalle I dans $\mathbf{K}$ est dite *continue par morceaux sur I* si, pour tout segment J contenu dans I, $f_{|J}$ est continue par morceaux sur J.

Proposition 6 (Structure d'espace vectoriel). *L'ensemble des applications continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$.*

Démonstration. Facile et donc laissée aux courageux lecteurs. □

Proposition 7. *Si f et g sont des fonctions continues par morceaux définies sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$, il en est de même des fonctions :*

- *fg.*
- *f/g si g ne s'annule pas sur I.*
- *$|f|$.*
- *$\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$.*
- *Si f est à valeurs réelles, f^+ et f_-.*

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas des fonctions continues par morceaux sur un segment. □

Exemple 4. Démontrons que la fonction f définie sur $I =]0, 1]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

est continue par morceaux sur I :
Soit $J \subset I$ un segment, on peut se limiter au cas où J est de la forme $[1/n, 1]$ avec $n \geq 2$ puisque tout segment contenu dans I est contenu dans un segment de ce type. Prouvons maintenant que $f_{|J}$ est continue par morceaux sur J. On considère la subdivision σ de J définie par :

$$\sigma = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}, \ldots, 1\right)$$

et, pour $2 \leq k \leq n$, la fonction f_k définie sur $J_k = [1/k, 1/(k-1)]$ par :

$$f_k(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{k-1}$$

qui est continue sur J_k et qui coïncide sur $]1/k, 1/(k-1)[$ avec f.
Donc f_J est continue par morceaux sur le segment J, le résultat voulu s'en déduit en libérant J.

Remarque 3. En revanche f n'est pas continue par morceaux sur le segment $[0,1]$ car elle y admet une infinité de points de discontinuité.

Définition 7 (Classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux). On dira que $f : I \to \mathbf{K}$ *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *($n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$) par morceaux sur un intervalle* I, qui n'est pas nécessairement un segment, si et seulement si pour tout segment $J \subset I$, $f_{|J}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur J.
Si $n \geq 1$, on notera alors $\mathrm{D}\, f$ toute application de I dans $\mathbf{K}$ dont la restriction à tout segment $J \subset I$ est une dérivée généralisée de $f_{|J}$. Une telle application $\mathrm{D}\, f$, dont on prouvera l'existence en cours, est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ par morceaux sur I et s'appelera **une dérivée généralisée de f sur I**.

Remarque 4. $\mathrm{D}\, f$ n'est pas définie de manière unique. **En pratique il convient de bien préciser ce qu'on prend pour $\mathrm{D}\, f$ et d'établir qu'elle est $\mathcal{C}^{n-1}$ par morceaux**.

Proposition 8 (Construction d'une dérivée généralisée). *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur l'intervalle I à valeurs dans* $\mathbf{K}$. *Pour qu'une application $g : I \to \mathbf{K}$ soit une dérivée généralisée de f sur I il est nécessaire et suffisant que pour tout segment $[a,b] \subset I$ il existe une subdivision $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]t_{i-1}, t_i[$ et qu'on ait :*

$$\boxed{\forall x \in]t_{i-1}, t_i[,\ g(x) = f'(x)}$$

Exemple 5. Reprenons la fonction f de l'exemple 4 dont on conserve les notations. De la même façon on prouve que f est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur I puisque $f_k \in \mathcal{C}^\infty(J_k, \mathbf{R})$ donc $f_{|J}$ est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur J pour tout segment $J \subset I$.
Posons $\Delta = \{1/n,\ n \in \mathbf{N}^*\}$. Pour $x \in I$, on définit alors $\mathrm{D}\, f(x)$ par :

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } x \notin \Delta \\ 12,5 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathrm{D}\, f$, ainsi définie, est bien $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $I =]0,1]$. Si $J \subset]0,1]$ est un segment il est inclus dans un segment de la forme $[1/N, 1]$ où $N \geq 2$. Alors, si $1 \leq n \leq N$, sur tout intervalle $]1/(n+1), 1/n[$, où f est $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\mathrm{D}\, f(x) = f'(x) \quad \text{qui est la dérivée usuelle de } f \text{ au point } x$$

ce qui prouve que $\mathrm{D}\, f$ est bien une dérivée généralisée de f sur $]0,1]$. Bien entendu, on aurait pu prendre $\mathrm{D}\, f(x) = \frac{-1}{x^2}$ pour tout $x \in I$, c'est par pure provocation qu'on ne l'a pas fait.

Exercice 2 (Fonctions de Bernoulli). -

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de polynômes telle que :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n' = B_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 0 \\ \int_0^1 B_n(t)dt = 0 \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

   Programmer les B_n en Maple.
2. Pour $n \geq 1$,on note $\tilde{B}_n$ la fonction 1-périodique qui coïncide avec B_n sur $[0,1[$. Montrer que $\tilde{B}_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$.
3. Montrer soigneusement que,pour $n \geq 3$,$\tilde{B}_n$ admet une dérivée continue qui n'est autre que $\tilde{B}_{n-1}$.[1]

1.3.2 L'intégrale comme fonction d'une borne

Dans cette section, I désigne un intervalle **quelconque** de $\mathbf{R}$. Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Proposition 9 (Extension de la relation de Chasles). *Soit $f : I \to \mathbf{K}$, continue par morceaux, a et b deux points de I. On pose :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \textit{si } a = b \\ -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{si } a > b \end{cases}}$$

Avec ces conventions, on a pour tout système (a,b,c) de points de I :

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x}$$

[1] Les B_n sont *les polynômes de Bernoulli* et les $\tilde{B}_n$ sont *les fonctions de Bernoulli*

Remarque 5. Que deviennent les inégalités des propositions 3 et 4 si les bornes du segment d'intégration ne sont plus dans le même ordre ?

Théorème 2 (Intégrale et primitives). *Soit f une fonction* **continue sur** *I, a un point de I. L'application F_a de I dans $\mathbf{K}$ définie par :*

$$\boxed{F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée vaut f. Il en résulte qu'une fonction continue sur un intervalle y admet des primitives. Deux primitives d'une même fonction continue sur I diffèrent d'une constante.

Proposition 10 (Extension aux fonctions continues par morceaux sur I). *Soit f une fonction continue par morceaux sur I, a un point de I. L'application F_a de I dans $\mathbf{K}$ définie par :*

$$\boxed{F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

est **continue sur I en revanche elle n'est pas nécessairement dérivable en tout point de I**. *Plus précisément : si x_0 est un point de I qui n'est pas un plus grand élément (resp un plus petit élément) de I, F_a est dérivable à droite (resp à gauche) en x_0 et sa dérivée à droite (resp à gauche) en x_0 vaut :*

$$\boxed{f(x_0+0) \quad \textit{resp} \quad f(x_0-0)}$$

En particulier, si f est continue en x_0, F_a est dérivable en x_0 et sa dérivée en ce point vaut $f(x_0)$.

Corollaire 1. *Avec les hypothèses et notations de la proposition 10, la fonction F_a est* **continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur** *I. En outre, si f est continue en un point $x \in I$, F_a est dérivable en ce point et $F_a'(x) = f(x)$.*

Remarque 6. On peut donc choisir $\mathrm{D}\,F_a$ de sorte que :

$$\mathrm{D}\,F_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \text{arbitrairement} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$, u et v deux applications de classes $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I' à valeurs dans I. Que vaut la dérivée de :

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\ ?$$

1.4 Sommes de Riemann

Théorème 3 (Sommes de Riemann). *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{C})$:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Démontré en cours sur l'uniforme continuité. □

1.5 La formule fondamentale du calcul différentiel et intégral et ses applications

On verra dans le chapitre sur le calcul intégral les diverses manières d'utiliser les résultats qui suivent.

Théorème 4 (Formule fondamentale du CDI). *Si f est* **continue sur le segment** *$[a, b]$* **et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur** *$[a, b]$ et si $\mathrm{D}\,f$ est une dérivée généralisée de f sur $[a, b]$ alors $\mathrm{D}\,f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et :*

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{D}\,f(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)}$$

Corollaire 2. *Si f est* **continue sur l'intervalle** *I* **et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur** *I et si $\mathrm{D}\,f = 0$ sur I alors f est constante sur I.*

Exercice 4. Que devient cette formule si f est simplement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$?

Proposition 11 (Intégration par parties). *Si f et g sont* **continues sur le segment** *$[a, b]$* **et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur** *$[a, b]$ alors :*

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{D}\,f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)\,\mathrm{D}\,g(t)\,\mathrm{d}t}$$

où $[f(t)g(t)]_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$.

Théorème 5 (Formule de Taylor avec reste intégral). *Si* f *est* **de classe** $\mathcal{C}^n$ **et de classe** $\mathcal{C}^{n+1}$ **par morceaux sur le segment** $[a, b]$, *alors :*

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + R_n}$$

avec :

$$\boxed{R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad f^{(n+1)} = \mathrm{D}\,f^{(n)}}$$

Ce reste peut encore s'écrire, en posant $b - a = h$ *:*

$$\boxed{R_n = h^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + u\,h)\,\mathrm{d}u \quad \text{où} \quad f^{(n+1)} = \mathrm{D}\,f^{(n)}}$$

Remarque 7. **Il est essentiel d'appliquer les trois derniers résultats à des segments**. Si l'on hésite à appliquer directement l'un d'entre eux, il est vivement conseillé de travailler avec une subdivision et les fonctions f_i correspondantes qui ont l'avantage d'être de classe $\mathcal{C}^n$ sur de bons segments.

1.6 Le changement de variables

Théorème 6 (Changement de variable). *Soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$ *et* $\phi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbf{R})$ *avec* $\phi(J) \subset I$*. alors, si* α *et* $\beta \in J$*, il vient, en posant* $a = \phi(\alpha)$ *et* $b = \phi(\beta)$ *:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Chapitre 2

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objet de cette partie est d'étendre la notion d'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment *ie* du type :

$$]a, b], \quad [a, b[, \quad]-\infty, b], \quad [a, +\infty[, \quad]c, d[$$

avec $-\infty < a < b < +\infty$ et $-\infty \leq c < d \leq +\infty$. Nous aurons besoin, pour cela de quelques notions préliminaires.

2.1 Suites exhaustives de segments

Définition 8 (d'une telle suite). On appelle *suite exhaustive de segments* de l'intervalle I toute suite (J_n) de segments contenus dans I et vérifiant les propriétés suivantes :

- La suite (J_n) est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que, pour tout entier n, $J_n \subset J_{n+1}$.
- Tout élément de I appartient à au moins un J_n *[et donc à tous les J_n à partir d'un certain rang puisque la suite (J_n) croît]* ce qui s'écrit encore :

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n = I$$

Explicitons des exemples dans tous les cas :

- Si I est un segment $[a, b]$, on prend $J_n = I$ pour tout n.

- Si $I =]a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$, on prend $J_n = [a_n, b]$ où (a_n) est une suite décroissante d'éléments de $]a, b[$ qui converge vers a.
- Si $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$, on prend $J_n = [a, b_n]$ où (b_n) est une suite croissante d'éléments de $]a, b[$ qui converge vers b.
- Si $I =]-\infty, b]$ avec $-\infty < b < +\infty$, on prend $J_n = [a_n, b]$ où (a_n) est une suite décroissante d'éléments de $]-\infty, b[$ qui converge vers $-\infty$.
- Si $I = [a, +\infty[$ avec $-\infty < a < +\infty$, on prend $J_n = [a, b_n]$ où (b_n) est une suite croissante d'éléments de $]a, +\infty[$ qui converge vers $+\infty$.
- Si $I =]c, d[$ avec $-\infty \leq c < d \leq +\infty$, on prend $J_n = [a_n, b_n]$ où $a_n < b_n$ pour tout n, (a_n) est un suite décroissante d'éléments de I qui tend vers c et (b_n) est une suite croissante d'éléments de I qui tend vers d.

La proposition suivante nous sera utile dans la suite :

Proposition 12. *Soit (J_n) une suite exhaustive de segments de I et $J = [a, b]$ (avec $a < b$) un segment contenu dans I. Alors J est contenu dans tous les J_n à partir d'un certain rang.*

Démonstration. On sait qu'existent deux entiers p et q tels que $a \in J_p$ et $b \in J_q$. Soit $N = \max(p, q)$. J_N contient J_p et J_q donc a et b donc J par convexité de J_N. Pour $n \geq N$, il vient donc $J \subset J_N \subset J_n$. □

2.2 Intégration des fonctions positives

2.2.1 Définition et caractérisation

Définition 9. Soit f une application de I dans $\mathbf{R}$ **continue par morceaux sur I et à valeurs** ≥ 0. On dit que f est intégrable sur I si l'ensemble $S(I)$ des réels de la forme :

$$\boxed{\int_J f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où } J \text{ est un segment contenu dans } I}$$

est majoré. Ce sous ensemble de $\mathbf{R}_+$, qui est clairement non vide, admet donc une borne supérieure positive qui est appelée l'intégrale de f sur I et qui est notée (provisoirement) :

$$\boxed{\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sup S(I)}$$

Il est clair que, si I est un segment $[a,b]$, toute fonction f, continue par morceaux et positive sur I, est intégrable sur I et que cette notion d'intégrale coïncide avec celle connue précédemment *ie* :

$$\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

puisque ce dernier réel est, dans ce cas, le plus grand élément de $S(I)$.

Telle quelle cette définition n'est pas très aisée à manipuler, d'où le résultat suivant :

Théorème 7 (Caractérisation). *Soit (J_n) une suite exhaustive de segments de I, posons $J_n = [a_n, b_n]$. Alors la fonction f positive et continue par morceaux sur I est intégrable sur I si et seulement si la suite de terme général :*

$$\boxed{\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

qui est croissante, *est majorée. Si c'est le cas cette suite converge et :*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Sinon f n'est pas intégrable sur I et :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty}$$

Démonstration. Supposons d'abord f intégrable sur I. Comme J_n est un segment contenu dans I, il vient :

$$\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t \in S(I) \quad \text{donc} \quad \int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

La suite de terme général $\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc croissante (car $J_n \subset J_{n+1}$ et que f est positive), majorée par $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$, elle converge donc vers une limite $l \leq \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$; prouvons l'égalité de ces deux nombres.
Soit $\epsilon > 0$, le réel $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t - \epsilon < \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ ne majore plus $S(I)$ duquel $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est le plus petit majorant. Il existe donc un segment $J \subset I$ tel que :

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t > \int_I f(t)\,\mathrm{d}t - \epsilon$$

On sait aussi, d'après la proposition 12, qu'il existe un entier N tel que :

$$n \geq N \Rightarrow J \subset J_n$$

Pour $n \geq N$, il vient, vu la positivité de f :

$$\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_J f(t)\,\mathrm{d}t > \int_I f(t)\,\mathrm{d}t - \epsilon$$

Le passage de cette inégalité à la limite, quand $n \to \infty$ assure que :

$$l \geq \int_I f(t)\,\mathrm{d}t - \epsilon$$

En libérant ϵ, il vient $l \geq \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et le résultat convoité.
Réciproquement : montrons que, si la suite de terme général $\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée-par un réel M-alors f est intégrable sur I. Il suffit, à cet effet d'établir que $S(I)$ est majoré. Soit $J \subset I$ un segment. Il existe un entier N tel que $J \subset J_N$ et donc :

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{J_N} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M$$

donc M majore $S(I)$, ce qu'on voulait.
Enfin si f n'est pas intégrable sur I, la suite précédente est croissante et non majorée, elle tend donc vers $+\infty$. □

2.2.2 Propriétés

Beaucoup de propriétés seront revues dans le cadre plus général des fonctions de signe quelconque. On s'intéresse ici à celles qui sont spécifiques aux fonctions positives et à celles qui nous seront utiles pour établir efficacement l'intégrabilité de telles fonctions.

Proposition 13. *Soit f une fonction* **continue sur I, intégrable sur I positive et d'intégrale nulle sur** *I alors f est nulle sur I.*

Démonstration. Le résultat est supposé connu pour un segment (réviser la preuve). Soit f une telle fonction, J un segment contenu dans I. D'après la positivité de f et la définition de l'intégrale de f sur I, il vient :

$$0 \leq \int_J f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Donc $\int_J f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et f est nulle sur J. En libérant J on obtient le résultat voulu. □

Exercice 5. Que devient ce résultat si on remplace "continue" par "continue par morceaux".

Proposition 14. *Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur un intervalle I, I' un intervalle contenu dans I alors f est continue par morceaux sur I'. En outre, si f est intégrable sur I, elle est intégrable sur I' et :*

$$\boxed{\int_{I'} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Si f est continue par morceaux sur I et si $J \subset I'$ est un segment, J est un segment inclus dans I donc f est continue par morceaux sur J, il s'ensuit que f est continue par morceaux sur I'.
Supposons maintenant que f soit en plus positive et intégrable sur I, il vient $S(I') \subset S(I)$ et donc $S(I')$ est majoré par :

$$\sup S(I) = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $\sup S(I')$ existe et est majoré par $\sup S(I)$, ce qu'on voulait. □

Proposition 15 (Localisation de l'intégrabilité). *Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur un intervalle I.*

- *Si I est de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et si $c \in]a, b[$, alors f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $[c, b[$; dans ce cas, on a :*

$$\boxed{\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c,b[} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

  Lorsqu'on étudie l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ on a alors coutume de dire "qu'il n'y a de problème qu'en b" ou "qu'au voisinage de b".

- *Si I est de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ et si $c \in]a, b[$, alors f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $]a, c]$; dans ce cas, on a :*

$$\boxed{\int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

  On peut donc remplacer l'étude de l'intégrabilité de f sur $]a, b]$ par l'étude de l'intégrabilité de f sur $]a, c]$. L'intégrabilité de f dépend donc essentiellement du comportement local de f **au voisinage de** *a. C'est pourquoi on convient de dire qu'on étudie l'intégrabilité de f "au voisinage de a".*

- *Si I est de la forme $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et si $c \in]a, b[$, alors f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$; dans ce cas, on a :*

$$\boxed{\int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c,b[} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

  On peut donc ramener l'étude de l'intégrabilité de f sur $]a, b[$ à l'étude de l'intégrabilité de f au voisinage de a et au voisinage de b.

Démonstration. On se limite à étudier le troisième cas, les deux autres sont proposés aux lecteurs à titre d'exercice d'apprentissage du cours [1].
On a vu que, si f est intégrable sur $]a, b[$, elle est intégrable sur tout sous intervalle de $]a, b[$ et donc sur $]a, c]$ et $[c, b[$. Réciproquement, supposons f intégrable sur chacun de ces deux intervalles. Soit (b_n) une suite croissante d'éléments de $]c, b[$ qui tend vers b et (a_n) une suite décroissante d'éléments de $]a, c[$ qui tend vers a. La suite (J_n), avec $J_n = [a_n, b_n]$ est une suite exhaustive de segments de $]a, b[$ et :

$$\int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Le membre de droite de cette égalité converge donc vers :

$$\int_{]a,c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Le membre de gauche aussi d'où le résultat d'après le théorème 7. □

Proposition 16 (Etude au voisinage d'une seule borne). *Soit f une fonction continue par morceaux, positive sur $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. La fonction F_a, définie sur $[a, b[$ par :*

$$\boxed{F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

est croissante sur $[a, b[$. Deux cas se présentent alors :

[1] me consulter en cas d'échec

– *Si f est intégrable sur I :*

$$\boxed{\lim_{x\to b} F_a(x) = \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

– *Si f n'est pas intégrable sur I :*

$$\boxed{\lim_{x\to b} F_a(x) = +\infty}$$

Les lecteurs énonceront un résultat analogue pour un intervalle de la forme $]a,b]$. Ce résultat permet, par exemple, l'étude de l'intégrabilité de f sur I lorsqu'on sait calculer F_a.

Démonstration. La croissance de F_a provient de la positivité de f. **comme F_a n'est pas dérivable** il faut la prouver directement. Si $x, y \in I$ avec $x < y$, il vient :

$$F_a(y) - F_a(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0 \quad \text{car } f \geq 0 \text{ sur } [x,y] \text{ et } x < y$$

– Si f est intégrable sur I. Pour $x \in I$, $F_a(x) \in S(I)$ donc F_a est croissante et majorée sur I par $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$; d'après le théorème de la limite monotone elle admet une limite finie l quand $x \to b$. Si (b_n) est une suite croissante d'éléments de $]a,b[$ qui converge vers b, il vient d'après le théorème 7 :
$$\lim_{n\to\infty} F_a(b_n) = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$
donc $l = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qu'on voulait.

– Si f n'est pas intégrable sur I, le même choix de (b_n) assure, toujours en vertu du théorème 7 :
$$\lim_{n\to\infty} F_a(b_n) = +\infty$$
donc F_a est croissante sur I, non majorée et donc tend vers $+\infty$ au voisinage de b.

□

Remarque 8. Sous les hypothèses de la proposition 16, **si b est fini** et si f admet une limite en b, elle se prolonge en une fonction $\hat{f}$ continue par morceaux sur le segment $[a,b]$; f est alors intégrable sur $[a,b[$ et :

$$\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t$$

Il suffit d'appliquer la proposition 16 en observant que la fonction :

$$x \mapsto \int_a^x \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[a,b]$. Les lecteurs feront de même dans les autres cas de figure.

Proposition 17 (Intégrabilité par domination). *Soient f et g deux fonctions positives et continues par morceaux sur I. On suppose que $f \leq g$ sur I alors :*

– *Si g est intégrable sur I, f aussi et :*

$$\boxed{\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\,\mathrm{d}t}$$

– *Si f n'est pas intégrable sur I, g non plus.*

Démonstration. Supposons l'intégrabilité de g. Soit (J_n) une suite exhaustive de segments de I. Il vient, pour tout entier naturel n :

$$\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{J_n} g(t)\,\mathrm{d}t$$

La suite majorante converge, par hypothèse, la suite de terme général $\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc croissante et majorée donc converge, d'où l'intégrabilité de f sur I. Le passage de l'inégalité précédente à la limite quand $n \to \infty$ assure alors *via* le théorème 7 :
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$
La contraposée de ce premier cas entraîne la validité du second. □

Proposition 18 (Intégrabilité par équivalence). *Soient f et g deux fonctions positives et continues par morceaux sur $I = [a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*

– *Si $f = O(g)$ sur I ou même seulement au voisinage de b, l'intégrabilité de g sur I entraîne celle de f et donc la non intégrabilité de f sur I entraîne la non intégrabilité de g.*
– *Si $f \sim g$ au voisinage de b, les deux fonctions f et g sont simultanément intégrables ou non intégrables sur I.*

On retiendra donc que c'est pareil que pour les séries à termes positifs.
Les lecteurs énonceront et établiront une proposition analogue dans le cas où $I =]a, b]$ et $-\infty \le a < b < +\infty$.

Démonstration. On distingue les deux situations :
– Supposons g intégrable sur I. Si $f = O(g)$ sur I c'est qu'il existe $M > 0$ tel que $f \le M\,g$ sur I et il suffit d'appliquer directement la proposition 17. Si $f = O(g)$ au voisinage de b, il existe $c \in [a, b[$ et $M > 0$ tels que $f \le M\,g$ sur $[c, b[$. f est donc intégrable sur $[c, b[$ d'après la proposition 17 et donc sur I d'après la proposition 15.
– Si $f \sim g$ au voisinage de b, il vient alors $f = O(g)$ au voisinage de b et $g = O(f)$ au voisinage de b ; il suffit d'appliquer le résultat du premier cas.

□

2.2.3 Étude pratique de l'intégrabilité d'une fonction positive

Dans cette section, si f est une fonction continue par morceaux, positive, intégrable sur un intervalle (a, b) d'un des types précédents, on notera son intégrale :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{au lieu de} \quad \int_{(a,b)} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Intégrabilité des puissances

Comme pour les séries de Riemann, les fonctions puissances jouent un rôle de référence pour appliquer l'une des propositions 17 ou 18. Les résultats suivants doivent être connus :

Proposition 19 (Intégrales de référence). *La lettre α désigne un réel.*

– *Soient $-\infty < a < b < +\infty$. L'application :*

$$\boxed{t \mapsto (t-a)^\alpha \quad \textit{resp} \quad t \mapsto (b-t)^\alpha}$$

est continue et positive sur $]a, b]$ resp $[a, b[$. Elle y est intégrable si et seulement si $\boxed{\alpha > -1}$.
– *L'application $\boxed{t \mapsto |t|^\alpha}$ est positive et continue sur $[a, +\infty[$ resp $]-\infty, a]$ avec $a > 0$ resp $a < 0$. Elle est intégrable sur cet intervalle si et seulement si $\boxed{\alpha < -1}$.*

Démonstration. On commence par $t \mapsto (t-a)^\alpha$ sur $]a, b]$. Si $\alpha \ge 0$, elle se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$ donc intégrable. Si $\alpha < 0$, on applique le résultat de la proposition 16 : soit $x = a + h \in]a, b]$:

$$\int_x^b (t-a)^\alpha\,\mathrm{d}t = \int_{a+h}^b (t-a)^\alpha\,\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}\left((b-a)^{\alpha+1} - h^{\alpha+1}\right) & \text{si } \alpha \ne -1 \\ \ln(b-a) - \ln h & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

Cette expression a une limite finie, quand $h \to 0$, si et seulement si $\alpha > -1$. Les lecteurs étudieront eux mêmes les autres cas. □

Plan de l'étude

– On étudie d'abord l'intervalle où la fonction est continue par morceaux de manière à décider s'il faut faire une étude d'intégrabilité en une ou en deux bornes. **Si f se prolonge par continuité en une borne finie, il est inutile de faire l'étude en cette borne en vertu de la remarque 8**.
– On fait l'étude d'intégrabilité séparément en chaque borne. Supposons, par exemple, qu'on décide d'étudier l'intégrabilité de f sur l'intervalle $[c, b[$ $(-\infty < c < b \le +\infty)$ sur lequel f est continue par morceaux et positive, on suggère d'étudier les cas suivants dans l'ordre :

1) Calcul direct d'une primitive de f : sur $[c, b-h]$ avec $0 < h < b - c$. Ce cas est assez rare et n'a d'intérêt, compte tenu de la longueur des calculs, que si l'on désire la valeur de l'intégrale qui s'obtient en faisant tendre h vers 0.

2) Recherche d'un équivalent simple de f en b : la proposition 18 permet de conclure.

3) Essai de domination : Si la méthode précédente échoue, on essaie (suivant l'intuition qu'on a du résultat à prouver) soit de dominer f, au voisinage de b, par une fonction intégrable, soit de dominer une fonction positive non intégrable par f. A cet effet, il peut être utile d'utiliser une technique analogue aux séries *ie* du type $t^\alpha f(t)$ si $b=+\infty$ ou $(b-t)^\alpha f(t)$ si b est fini.

4) Changement de variable, intégration par parties : *cf* exemples.

5) Autres méthodes : Dans certaines situations moins élémentaires *cf la partie 2.4*.

Exemple 6 *(Intégrabilité du logarithme).* sur $]0,b]$. La fonction $|\ln|$ est positive et intégrable sur $]0,b]$. En effet elle est continue sur cet intervalle et, si $h>0$:

$$\int_h^1 |\ln x|\,\mathrm{d}x = -\int_h^1 \ln x\,\mathrm{d}x = -\left[h\ln h - h\right]_h^1$$

quand $h \to 0$, cette dernière expression admet pour limite 1.
On aurait pu aussi observer que :

$$|\ln x| = O\left(x^{-1/2}\right) \qquad \text{quand } x \to 0$$

Exemple 7 *(Fonction gamma).* Soit x un réel, étudions l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction f définie par :

$$t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$$

a) Détermination de l'intervalle où f est continue par morceaux : Si $x \geq 1$, f se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$. Le seul problème se posera au voisinage de $+\infty$. Si $x<1$, la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, on étudiera donc son intégrabilité sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$ (le choix de la borne intermédiaire 1 est purement arbitraire).

b) Intégrabilité sur $]0,1]$: Comme on vient de l'écrire, si $x \geq 1$, f se prolonge continûment à $[0,1]$. Elle y est donc intégrable.
Si $x<1$. On cherche d'abord un équivalent de f au voisinage de 0 :

$$f(t) \sim t^{x-1} \quad \text{quand } t \text{ est au voisinage de } 0$$

Or $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x-1>-1$ *ie* si $x>0$. En conclusion, f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x>0$.

c) Intégrabilité sur $[1,+\infty[$: f est continue sur $[1,+\infty[$, on ne peut en trouver un équivalent plus simple quand $t \to +\infty$. Comme l'exponentielle tend très vite vers 0 quand $t \to +\infty$, on essaie de dominer f au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0 \quad ie \quad f(t) = o\left(t^{-2}\right) \text{ quand } t \to +\infty$$

Or $t \mapsto t^{-2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est donc de même de f.

En conclusion : f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x>0$. On note

$$\gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exemple 8 *(Intégrales de Bertrand).* Etudier l'intégrabilité sur $]0,1[$, puis sur $]1,+\infty[$ de :

$$t \mapsto t^\alpha |\ln t|^\beta$$

Où α et β sont deux réels fixés.

Exercice 6. Etudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de :

$$t \mapsto \exp\left(-|\ln(t)|^\alpha\right)$$

où $\alpha>0$.

2.3 Intégration des fonctions de signe quelconque et à valeurs complexes

La définition s'apparente à celles des séries **absolument convergentes**.

Définition 10 (Intégrabilité). On dit qu'une fonction f, continue par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes est intégrable sur I si et seulement si la fonction $|f|$, qui est continue par morceaux sur I, à valeurs réelles positives, est intégrable sur I.

Théorème 8 (Intégrale des fonctions à valeurs réelles). *Soit f une fonction continue par morceaux, à valeurs réelles, intégrable sur un intervalle I, alors les fonctions f^+ et f^- sont continues par morceaux, à valeurs réelles positives et intégrables sur I. On pose alors* **par définition** *:*

$$\boxed{\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f^+(t)\,\mathrm{d}t - \int_I f^-(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Conférer la proposition 7. L'intégrabilité de ces deux fonctions provient des inégalités $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$ et de la proposition 17. □

Théorème 9 (Intégrale des fonctions à valeurs complexes). *Soit f une fonction continue par morceaux, à valeurs complexes, intégrable sur un intervalle I, alors les fonctions $g = \operatorname{Re} f$ et $h = \operatorname{Im} f$ sont continues par morceaux, à valeurs réelles, intégrables sur l'intervalle I. On pose alors* **par définition** *:*

$$\boxed{\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_I h(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Conférer la proposition 7. L'intégrabilité de ces deux fonctions provient des inégalités $0 \leq |g| \leq |f|$ et $0 \leq |h| \leq |f|$ et de la proposition 17. □

Ces définitions sont pénibles à manier, heureusement on a la :

Proposition 20. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, à valeurs complexes,* **supposée intégrable sur** *I. Si (J_n) est une suite exhaustive de segments de I, alors :*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Pour les fonctions à valeurs réelles c'est une conséquence du théorème 7, appliqué à f^+ et f^-, et de l'identité $f = f^+ - f^-$. Le cas complexe s'en déduit immédiatement *via* les parties réelles et imaginaires. □

Remarque 9 *(Cohérence).* Les lecteurs vérifieront que cette notion généralise bien toutes les notions d'intégrale précédemment définies (fonctions continues par morceaux sur un segment et fonctions continues par morceaux positives sur un intervalle).

Remarque 10 *(Très importante).* **contrairement au théorème 7, il n'y a pas de réciproque lorsque les fonction ne sont pas à valeurs positives**. Prenons l'exemple de la fonction $t \mapsto t$ sur $I = \mathbf{R}$.

La suite (J_n), avec $J_n = [-n, n]$ est une suite exhaustive de segments de I, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et pourtant f n'est pas intégrable sur I car $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Exercice 7. Etudier l'intégrabilité, sur $]0,1]$, puis sur $[1,+\infty[$ de :

$$t \mapsto t^z \quad \text{Où } z \in \mathbf{C}$$

2.3.1 Propriétés

Proposition 21 (Linéarité et application). *Si f et g sont des fonctions à valeurs complexes, continues par morceaux, intégrables sur un intervalle I, pour tout couple (α,β) de complexes, la fonction $\boxed{h = \alpha f + \beta g}$ est intégrable sur I et :*

$$\boxed{\int_I h(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_I g(t)\,\mathrm{d}t}$$

Il d'ensuit que l'ensemble $E_1(I,\mathbf{K})$ constitué des fonctions continues par morceaux sur I (resp continues), à valeurs dans $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-sous espace vectoriel du $\mathbf{K}$-espace vectoriel des fonctions continues par morceaux (resp continues) sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$ et que l'application :

$$\boxed{f \mapsto \int_I f(t)\,\mathrm{d}t}$$

est une forme linéaire sur $E_1(I,\mathbf{K})$.

Démonstration. Soit J un segment inclus dans I. Il vient, en vertu des propriétés des intégrales des fonctions continues par morceaux **sur un segment** :

$$\int_J |h(t)|\,\mathrm{d}t \leq |\alpha|\int_J |f(t)|\,\mathrm{d}t + |\beta|\int_J |g(t)|\,\mathrm{d}t \leq |\alpha|\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t + |\beta|\int_I |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

L'ensemble des réels de la forme $\int_J |h(t)|\,\mathrm{d}t$, obtenus en libérant J, est donc majoré d'où l'intégrabilité de $|h|$ sur I c'est-à-dire de h.
Soit alors (J_n) une suite exhaustive de segments de I : il vient, d'après la

linéarité de l'intégrale **des fonctions continues par morceaux sur un segment** :

$$\int_{J_n} h(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_{J_n} g(t)\,\mathrm{d}t$$

La proposition 20 autorise le passage à la limite de cette inégalité :

$$\int_I h(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$

Ce qu'on voulait. Le reste est laissé aux lecteurs. □

Remarque 11 *(La scission).* nécessite quelques précautions. Par exemple la fonction h définie sur $]0,1]$ par :

$$h(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$$

est intégrable sur $]0,1]$ car elle se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$. Pourtant aucune des deux fonctions :

$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{t} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{-1}{t}$$

n'est intégrable sur $]0,1]$.

Proposition 22 (Croissance). *Si f et g sont des fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux, intégrables sur un intervalle I et telles que $f \leq g$, alors*

$$\boxed{\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Soit (J_n) une suite exhaustive de segments de I. On utilise la proposition 20 pour passer l'inégalité :

$$\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{J_n} g(t)\,\mathrm{d}t$$

à la limite quand $n \to \infty$. □

Proposition 23 (Inégalité pour l'intégrale du module). *Si f est une fonction à valeurs complexe, continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I :*

$$\boxed{\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Même méthode que pour la proposition précédente. □

Exercice 8. Soit f une application continue et intégrable d'un intervalle I dans $\mathbf{K}$. On suppose que l'inégalité de la question précédente est une égalité. Démontrer que :

1. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, f est de signe constant.
2. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, il existe un réel θ tel que :

$$\forall t \in I,\ f(t) = |f(t)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Proposition 24 (Chasles et localisation). *Si f est une fonction à valeurs complexe, continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I, elle est continue par morceaux et intégrable sur tout sous intervalle $I' \subset I$. Au surplus, si c est un point intérieur à I [2] et si l'on pose $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$, qui sont donc des intervalles non réduits à un point, f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur I_g et I_d et :*

$$\boxed{\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{I_g} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{I_d} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Les propositions 14 et 15 ont établi ces résultats pour les fonctions à valeurs réelles positives. On s'y ramène :
Si f est intégrable sur I, $|f|$ aussi donc $|f|$ est intégrable sur I' en vertu de la proposition 14 ; f est donc intégrable sur I'.
Pour prouver la deuxième partie de la proposition, on étudie d'abord le cas où f est à valeurs réelles et on applique la proposition 15 à f^+ et f^-. Le cas des fonctions complexes s'en déduit *via* le passage par les parties réelles et imaginaires. □

[2] *ie* n'est pas une extrémité de I

Proposition 25 (Comportement à l'infini). *Soit f une fonction à valeurs complexes, continue par morceaux et intégrable sur $[a, +\infty[$.* **Si l'on suppose que f possède une limite l en $+\infty$** *alors $l = 0$.* **EN REVANCHE f peut fort bien être intégrable sur $[a, +\infty[$ sans avoir de limite en $+\infty$. De manière générale, on retiendra qu'on peut déduire l'intégrabilité de f sur un intervalle I de son comportement asymptotique aux bornes de I mais que la seule hypothèse d'intégrabilité de f sur I ne permet pas de décrire de façon simple le comportement asymptotique de f aux bornes de I.**

Démonstration. Supposons $f(x) \to l \neq 0$ quand $x \to +\infty$ alors :

$$|f(x)| \sim |l| > 0 \quad \text{quand } x \to +\infty$$

Or la fonction $x \mapsto |l|$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ car :

$$\int_a^x |l| \, \mathrm{d}t = |l|(x - a) \to +\infty \quad \text{quand } x \to +\infty$$

donc, d'après la proposition 18, $|f|$ donc f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$. Les lecteurs construiront, au moins avec un dessin, une fonction f continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ mais qui n'a pas de limite en $+\infty$. On prendra, par exemple, pour graphe de f, une suite de triangles isocèles de base Ox et dont la série des aires converge. □

2.3.2 Exemples d'intégrabilité

Rien de nouveau par rapport à la section 2.2.3 puisque prouver l'intégrabilité de f c'est prouver l'intégrabilité de $|f| \geq 0$.

Exemple 9. Prouver l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} (x - \pi/4) \ln(\cos x) \, \mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + x) \ln(|1 + x|)}{x^4 + x^2 + 1} \, \mathrm{d}x$$

2.3.3 Exemples de calcul d'intégrales

On aura besoin de deux résultats techniques :

Proposition 26 (Cas d'une étude en seule borne). *Soit f une fonction à valeurs complexes, continue par morceaux, sur $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.* **On suppose que f est intégrable sur I.** *Alors la fonction F_a, définie sur $I = [a, b[$ par :*

$$\boxed{F_a(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t}$$

est **continue sur I** *et :*

$$\boxed{\lim_{x \to b} F_a(x) = \int_I f(t) \, \mathrm{d}t}$$

EN REVANCHE L'EXISTENCE D UNE LIMITE EN b POUR F_a NE GARANTIT L'INTÉGRABILITÉ DE f QUE LORSQUE CELLE-CI EST A VALEURS RÉELLES POSITIVES

En effet, on verra en cours que la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

possède une limite quand $x \to +\infty$ quoique la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, prolongée par continuité en 0 ne soit pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Cette limite sera notée :

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

Démonstration. Lorsque f est à valeurs réelles positives c'est la proposition 16, lorsque f est intégrable, à valeurs réelles, on applique cette proposition 16 à f^+ et f^- puis $f = f^+ - f^-$, enfin lorsque f est à valeurs complexes, on se ramène au cas précédent *via* les parties réelles et imaginaires de f. □

Exemple 10. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbf{R})$. Montrer que l'existence des deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} f^2(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} (f"(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

entraine celle de $\int_0^{+\infty} (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Proposition 27 (Cas d'une étude en les deux bornes). *Soit f une fonction à valeurs complexes, continue par morceaux sur $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On suppose f intégrable sur $]a, b[$. On sait alors, que pour $x \in]a, b[$, f est intégrable sur $]a, x]$. La fonction définie sur $]a, b[$ par :*

$$x \mapsto \int_{]a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Possède alors une limite quand $x \to b$:

$$\boxed{\lim_{x\to b} \int_{]a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Fixons $c \in]a, b[$; pour $a < x < c < y < b$, il vient :

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or f est intégrable sur $]a, c]$ et $[c, b[$ donc, pour $x > c$:

$$\int_{]a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où le résultat annoncé *via* les propositions 26 et 24. □

Remarque 12 *(Notation définitive).* **Si f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur un intervalle (a, b) d'un des types précédents, on notera définitivement son intégrale** :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{au lieu de} \quad \int_{(a,b)} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exemple 11. Existence et calcul de

$$\int_{-1}^{1} (t^3 + 1) \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \mathrm{d}t$$

Exemple 12. Existence et calcul de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{(t-2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)\sqrt{t^2-1}}$$

Exemple 13. Existence et calcul de :

$$\int_{-\infty}^{-1} \sqrt{\frac{t}{1+t}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Exercice 9. Existence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{(1+\operatorname{sh} t)\sqrt{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh} t}}$$

Exercice 10. Existence et calcul de :

$$\int_a^b \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x-x^2}}$$

Où $a < b$ sont les racines du trinôme $x^2 + x - 1$

Exercice 11. Calculer :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$$

en examinant la période de l'intégrande.

2.4 Compléments

2.4.1 Utilisation d'une série

Dans certains cas on peut se servir de séries pour prouver l'intégrabilité d'une fonction. On utilise le résultat suivant *qu'il faut savoir redémontrer* :

Proposition 28. *Soient*

- *f une fonction continue par morceaux,* **positive** *sur un intervalle $I = [a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.*
- *$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'éléments de I avec $a_0 = a$ et $\lim a_n = b$.*

– $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Alors la fonction f est intégrable sur I si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} I_n$ converge, et dans ce cas :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} I_n}$$

Démonstration. La suite $([a, b_n])$ est une suite exhaustive de segments de I et :

$$\int_a^{b_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} I_k$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. □

Exemple 14. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^\alpha |\sin x|}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. Il s'agit d'étudier l'intégrabilité de :

$$g(x) = |f(x)| = \frac{|\cos x|}{1 + x^\alpha |\sin x|}$$

Cas où$\alpha > 0$ **:** La fonction g se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Le problème provient de ce que la fonction sinus du dénominateur peut prendre des valeurs "petites". L'idée consiste à se placer sur un intervalle $[a_n, a_{n+1}]$ où x^α ne varie pas trop en un sens qu'on va préciser. Posons :

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(x)dx$$

On va chercher un équivalent de I_n qui permettra d'étudier la nature de la série $\sum I_n$.

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x| dx}{1 + ((n+1)\pi)^\alpha |\sin x|} \leq I_n \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x| dx}{1 + (n\pi)^\alpha |\sin x|}$$

Les intégrales encadrantes se calculent. En notant J_n celle de gauche, la π-périodicité de la fonction intégrée permet d'établir que :

$$J_n = \int_0^\pi \frac{|\cos x| dx}{1 + (n\pi)^\alpha |\sin x|}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + (n\pi)^\alpha \sin x}$$

Le changement de variable $\sin x = t$ assure :

$$J_n = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha t} = \frac{2\alpha \ln n}{(n\pi^\alpha)}$$

Donc, puisque $J_n \sim J_{n+1}$ quand $n \to \infty$:

$$I_n \sim \frac{2\alpha \ln n}{(n\pi^\alpha)}$$

De l'étude, déjà faite, de cette série à termes positifs, il découle : Pour $\alpha > 0$, f est intégrable sur I si et seulement si $\alpha > 1$

Cas où $\alpha < 0$ **:** La fonction g se prolonge encore par continuité en 0 (pourquoi ?). On voit qu'au voisinage de l'infini :

$$g(x) = \frac{|\cos x|}{1 + x^\alpha |\sin x|} \sim |\cos x|$$

En effet $g(x)$ s'écrit sous la forme $|\cos x|\,(1 + \epsilon(x))$ avec $\lim_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0$. Or la fonction $x \mapsto |\cos x|$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ (pourquoi ?), donc g non plus.

Cas $\alpha = 0$ **:** On peut calculer $\int_0^X g(x)dx$ mais le plus simple est encore de calculer I_n comme ci-dessus. On trouve :

$$I_n = 2\ln 2$$

donc $\sum I_n$ diverge et f n'est pas intégrable.

□

Exercice 12. Intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de :

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^\alpha |\cos(x \ln x)|} \ ?$$

On introduira la fonction u réciproque de $x \mapsto x \ln x$ sur $[1,+\infty[$ (dont on trouvera un équivalent en $+\infty$) et la suite $\left(u(\frac{\pi}{2} + n\pi)\right)$.

Exercice 13. Soient α et β deux réels. La fonction :

$$f \ : \ x \in]0,+\infty[\mapsto \sin(x)\, x^\beta \ \mathrm{e}^{-x^\alpha}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > -2$.

Exercice 14. Discuter suivant α et β l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto \sin(\ln^\beta x)\, x^\alpha$ sur $]1,+\infty[$.

2.4.2 Intégration des relations de comparaison

Théorème 10 (Hors programme). $I = [a, b[$ *avec* $-\infty < a < b \leq +\infty$. *Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs complexes et g une fonction continue par morceaux sur I à valeurs réelles* **positive au voisinage de** b. *On suppose que $f = o(g)$ au voisinage de b, alors, quand $x \to b$:*

- *Si g* **est intégrable sur** *I , il en est de même de f et :*

$$\boxed{\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$

- *Si g* **n'est pas intégrable sur** *I :*

$$\boxed{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$

Démonstration. Comme pour les séries. □

Exemple 15. La série $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$ diverge et, quand $n \to \infty$:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}} \sim \int_0^n \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}\ \mathrm{d}t \sim n\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$$

Théorème 11 (Intégration des développements limités). *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbf{K}$. On suppose que f' admet, au voisinage de $a \in I$, le développement limité suivant :*

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)}$$

Alors f admet, au voisinage de a, le développement limité d'ordre $n+1$ suivant :

$$\boxed{f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)}$$

Démonstration. Soit g la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)}(x-a)^{k+1}$$

Il vient, quand $t \to a$:

$$f'(t) = o\left((t-a)^n\right)$$

Si a n'est pas plus grand élément de I, il existe $b \in I$ tel que $b > a$ et g' est intégrable sur $[a, b]$ puisqu'elle y est continue. Le théorème d'intégration des relations de comparaison assure alors que, quand $x \to a^+$:

$$\int_a^x g'(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x (t-a)^n\,\mathrm{d}t\right)$$

Donc

$$g(x) = o\left((x-a)^{n+1}\right) \qquad \text{quand } x \to a \text{ à droite}$$

Même chose à gauche de a si a n'est pas plus petit élément de I et le résultat. □

Exemple 16 *(Exemple d'intégration d'un développement asymptotique).* On veut un développement asymptotique à trois termes de arcsin au voisinage de 1. On considère :

$$f : x \in [0, 2[\mapsto \arcsin(1-x)$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2[$:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{-1}{\sqrt{2x}}\left(1 + \frac{x}{4} + o(x)\right)$$

quand $x \to 0$. On considère alors, pour $x \in]0,2[$:

$$g(x) = f'(x) + \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{2}}$$

Pour $0 < x < 2$, g est intégrable sur $]0,x]$ car elle se prolonge continûment à $[0,x]$. En outre, quand $t \to 0$:

$$g(t) = o\left(\sqrt{t}\right) \quad \text{donc} \quad |g(t)| = o\left(\sqrt{t}\right)$$

On en déduit que $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right)$ soit :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}x^{3/2}}{12} + o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

On se borne à quelques exercices

Exercice 15. Développement asymptotique à deux termes de :

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[4]{1+t^4}}$$

au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16. Même question avec :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 17. Même question avec :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 18. Étude complète (Définition, continuité, variations, études locales, courbe représentative) de la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{|t^4-1|}}$$

(On commencera par donner un sens à cette écriture qui ne correspond pas à une situation figurant *stricto sensu* dans le programme.)

L'intégrale 20 octobre 2002

Exercice 19. Etude au voisinage de 1 de la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

En déduire la valeur de :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)\,\mathrm{d}t}{\ln t}$$