Complément sur les endomorphismes et les matrices symétriques d'un espace euclidien

PC*2

1 février 2001

1 Formes bilinéaires et endomorphismes

Définition 1 (Matrice d'une forme bilinéaire dans une base). Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et B une forme bilinéaire sur E. On appelle matrice de B dans une base $(e) = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E la matrice :

$$M = [B(e_i, e_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$$

Si X et Y sont les matrices colonnes qui représentent les vecteurs x et y dans la base (e), il vient :

$$B(x, y) = {}^t XMY$$

Démonstration. On écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad x = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

On développe $B(x, y)$ en utilisant la bilinéarité de B :

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, e_j) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j B(e_i, e_j) = {}^t XMY$$

□

Proposition 1. *Soit $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien, $a \in \mathcal{L}(E)$. L'application S_a de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ définie par :*

$$(x, y) \mapsto (x|a(y)) = B_a(x, y)$$

est une forme bilinéaire dite représentée par a. réciproquement, si B est une forme bilinéaire sur E, il existe un unique $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $B = B_a$. On dit que a est l'endomorphisme de E qui représente B. De surcroît $a \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si B_a est une forme bilinéaire symétrique.

Démonstration. Déja vu, c'est ce qui nous a permis de définir l'adjoint d'un endomorphisme. B_a est symétrique si et seulement si :

$$\forall x, y \in E,\ B_a(x, y) = B_a(y, x) \quad ie \quad ((x|a(y))) = (y|a(x)) = (a(x)|y)$$

Ce qui signifie bien que a est un endomorphisme symétrique de E. □

Proposition 2. *Si (e) est une base* **orthonormée** *de E, les matrice de B_a et de a dans la base (e) sont les mêmes. Si $A = \mathrm{Mat(a, (e))}$ et si X et Y sont les matrices colonnes qui représentent les vecteurs x et y dans la base (e), il vient :*

$$(x|a(y)) = {}^t XAY = B_a(x, y)$$

Démonstration. Soit $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat(a, (e))}$. Puisque (e) est orthonormée la i-éme composante de $a(e_j)$ dans (e) est donnée par $(e_i|a(e_j))$. Donc :

$$a_{ij} = (e_i|a(e_j)) = B_a(e_i, e_j)$$

Enfin, il vient :

$$(x|a(y)) = {}^t X(AY) = {}^t XAY$$

□

Remarque 1 *(Expressions quadratiques).* En pratique lorsqu'on a une expression de la forme

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j \qquad \text{avec } a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$$

Où les x_i représentent les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans une base orthonormée (e), il faut observer que :

$$Q(x) = {}^t XAX = (x|a(x)) = B_a(x, x)$$

où $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}(a, (e))$.

Proposition 3 (Cas d'une base de diagonalisation). *Soit a un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension $n \geq 1$ et (e) une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de a. Alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E :*

$$(x|a(y)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i \qquad (x|a(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Où λ_i est la valeur propre de a associée à e_i. Supposons les valeurs propres de a classées par ordre croissant. Si $||x|| = 1$:

$$\lambda_1 \leq (x|a(x)) \leq \lambda_n$$

avec égalité pour e_1 et e_n. En particulier :

$$\max_{x \neq 0} \frac{(x|a(x))}{(x|x)} = \lambda_n \qquad \min_{x \neq 0} \frac{(x|a(x))}{(x|x)} = \lambda_1$$

Exemple 1. Calculer les extréma de :

$$\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Lorsque (x, y, z) décrit $\mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

Exercice 1. trouver les bornes de la quantité :

$$\frac{\int_{-1}^{1} P'(t)^2 dt}{\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{1-t^2} dt}$$

Lorsque P décrit l'ensemble des polynômes P non nuls de $\mathbf{R}_n[X]$ tels que $P(-1) = P(1) = 0$.

Exercice 2. Comment trouver les bornes de la quantité

$$\frac{(x|f(x))}{(x|x)} \quad x \in E - \{0\}$$

lorsque f est un endomorphisme **quelconque** de l'espace euclidien E ? *(Décomposer f en somme d'un endomorphisme symétrique et d'un endomorphisme antisymétrique).*

2 Endomorphismes positifs

Dans cette section tous les endomorphismes et toutes les matrices sont carrées et symétriques réelles

2.1 Endomorphismes positifs, matrices positives

Définition 2. On dit qu'un endomorphisme symétrique a d'un espace euclidien E est positif si et seulement si B_a est positive *ie* :

$$\forall x \in E, \ (x|a(x)) \geq 0$$

On dit qu'une matrice symétrique réelle, de taille n, A est positive si l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique) canoniquement associé à A est positif. Ce qui se traduit par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \ {}^t\!XAX \geq 0$$

Bien entendu l'endomorphisme symétrique a est positif si et seulement si sa matrice dans une *resp toute* base **orthonormée** de E est positive.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2. □

Remarque 2 *(Notations).* L'ensemble des endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien E est noté $\mathcal{S}^+(E)$. L'ensemble des matrices symétriques réelles positives de taille n est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.

Proposition 4 (Caractérisation spectrale). *Un endomorphisme symétrique a d'un espace euclidien E est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives. Une matrice symétrique réelle A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. En particulier, le déterminant d'un endomorphisme symétrique positif ou d'une matrice symétrique positive est toujours positif.*

Démonstration. Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre λ d'un endomorphisme symétrique positif a. Puisque $x \neq 0$, $(x|x) > 0$ d'où :

$$(x|a(x)) = \lambda(x|x) \quad ie \quad \lambda = \frac{(x|a(x))}{(x|x)} \geq 0$$

Réciproquement si les valeurs propres de a sont positives, il vient, dans une base de diagonalisation de a :

$$(x|a(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

□

Exercice 3. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients de $A \in \mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ pour que celle ci soit positive.

Exercice 4. Soit $a \in \mathcal{S}^+(E)$, prouver que :

$$(x|a(x)) = 0 \Leftrightarrow a(x) = 0$$

2.2 Endomorphismes définis positifs

Définitions et résultats analogues que pour les endomorphismes symétriques positifs. **On observera que a est un endomorphisme symétrique défini positif d'un espace euclidien E si et seulement si la forme bilinéaire B_a est un produit scalaire.**

Remarque 3 *(Notations).* L'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs d'un espace euclidien E est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$. L'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de taille n est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Proposition 5.

$$\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap \mathrm{GL}(E) \qquad \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$$

.

Démonstration. Découle immédiatement de la caractérisation spectrale. □

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que les extréma de :

$$\frac{{}^tXBX}{{}^tXAX} \qquad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) - \{0\}$$

sont la plus grande et la plus petite valeur propre de $C = A^{-1}B$. Application : déterminer les extréma de :

$$\frac{xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Exercice 6. En raisonnant comme dans l'exercice précédent dont on conserve les hypothèses et les notations, montrer que la matrice $C = A^{-1}B$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Exemple 2. Soient A et B deux matrices symétriques positives telles que $A \leq B$ c'est-à-dire que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. En commençant par le cas $B = \mathrm{I}_n$, démontrer que $\det A \leq \det B$. Interprétation géométrique ?

Exercice 7. Soient a et b deux endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien E.

1. On suppose $b \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que ab est autoadjoint positif pour S_b. En déduire qu'il est diagonalisable.
2. On reprend le cas général. Montrer que $\mathrm{Sp}\, ab \subset \mathbf{R}^+$. *(On pourra se placer dans une base de diagonalisation de b et se ramener au cas précédent via un calcul par blocs).*
3. Pour $x \in E$, encadrer $||a(x)||$ et $||b(x)||$ à l'aide de $||x||$ et des valeurs propres de a et b. En déduire un encadrement des valeurs propres de ab.

Proposition 6 (Définition d'un produit scalaire). *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$. On se donne une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Il existe une et une seule forme bilinéaire B sur $E \times E$ telle que, pour tout couple (i, j) on ait $B(e_i, e_j) = a_{ij}$. On a alors les propriétés suivantes :*

- *Pour x et y appartenant à E, de matrices respectives X et Y dans (e) :*

$$B(x, y) = {}^tXAY$$

- *B est symétrique si et seulement si A l'est.*
- *B est symétrique positive si et seulement si A l'est.*
- *B est un produit scalaire si et seulement si A est symétrique, définie, positive.*

Exercice 8. A quelles conditions l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$$

est-elle le carré d'une norme euclidienne sur $\mathbf{R}^2$?

Remarque 4. On déduit de la proposition précédente que si (e) est une base **quelconque** d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension n, on peut munir E d'un unique produit scalaire B tel que la base (e) soit orthonormée. Il suffit d'appliquer cette proposition avec $A = \mathrm{I_n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Exercice 9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisable, prouver qu'elle peut s'écrire comme produit de deux matrices symétriques réelles dont l'une est définie positive. *(On considérera une base de vecteurs propres de M et on munira l'espace $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire pour lequel ladite base est orthonormée.)*

2.3 Racine carrée d'un endomorphisme positif

Proposition 7 (L'endomorphisme u^*u). *Soit $(E, (\ |\ )))$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

- *Les endomorphisme u^*u et uu^* sont symétriques et positifs. En particulier, si $u \in \mathcal{S}(E)$, u^2 est symétrique et positif.*
- $\operatorname{Ker} u^*u = \operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} uu^* = \operatorname{Im} u$. *En particulier ces deux endomorphismes ont même rang que u.*

Démonstration. Symétrie : D'aprés les propriétés opératoires de l'adjoint :

$$(u^*u)^* = u^*u^{**} = u^*u$$

Même chose pour uu^*.
Positivité : Pour $x \in E$:

$$(x|u^*u(x)) = (u(x)|u(x)) \geq 0$$

Même chose pour uu^*.
Noyau de u^*u : Il est clair que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^*u$. Réciproquement soit $x \in \operatorname{Ker} u^*u$ *ie* $u^*u(x) = 0$ d'òu :

$$0 = (x|u^*u(x)) = (u(x)|u(x)) = ||u(x)||^2$$

Il s'ensuit que $u(x) = 0$ et donc que $x \in \operatorname{Ker} u$. On en conclut que $\operatorname{Ker} u^*u = \operatorname{Ker} u$ et donc $\operatorname{rg} u^*u = \operatorname{rg} u$.
Image de uu^* : On peut appliquer ce qui précède à uu^* au remplacement prés de u par u^*. Donc $\operatorname{Ker} uu^* = \operatorname{Ker} u^*$ et $\operatorname{rg} uu^* = \operatorname{rg} u^* = \operatorname{rg} u$. Or $\operatorname{Im} uu^* \subset \operatorname{Im} u$ et leur dimension est la même d'où l'égalité. □

Proposition 8. *Soit $(E, (\ |\ )))$ un espace euclidien. Soit $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que h^2 soit une homothétie : $h^2 = \lambda \mathrm{Id}$. Alors $\lambda \geq 0$ et h est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$.*

Démonstration. $h^2 = h^*h \in \mathcal{S}^+(E)$ donc $\lambda \geq 0$ puisque c'est une valeur propre de h^2. Si μ est une valeur propre de h, elle est positive et vérifie $\mu^2 = \lambda$ donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. h est diagonalisable puisqu'il est autoadjoint et ne possède que la valeur propre $\sqrt{\lambda}$, c'est donc $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$. □

Théorème 1. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Il existe un et un seul $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^2 = u$. On l'appelle la racine carrée de u et on le note $\sqrt{u}$.*

Démonstration. Existence : On diagonalise u dans une base orthonormée de vecteurs propres (e). Il vient :

$$\mathrm{Mat}(u, e) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

avec les $\lambda_i \geq 0$. L'endomorphisme h dont la matrice, par rapport à (e) est :

$$\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

est symétrique puisque sa matrice realtivement à la base orthonormale (e) l'est. Il est positif puisque son spectre l'est. Il vérifie bien $h^2 = u$.
unicité : Soit $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$. Soit λ une valeur propre de u. v commute avec $v^2 = u$ donc stabilise le sous espace propre de u associé à λ : $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$. L'endomorphisme $\tilde{v}$ induit par v sur E_λ est symétrique, positif et vérifie $\tilde{v}^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda}$ donc $\tilde{v} = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{E_\lambda}$ d'aprés la proposition précédente. Les restrictions de v et h aux sous espaces propres de u, dont E est somme directe, coïncident donc $v = h$. □

Remarque 5. Si $u \in \mathcal{S}^+(E)$, il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^*h = hh^* = u$. D'où la réciproque de la proposition 7.

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$, montrer que, si $k \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^k = u$ et un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Exercice 11. Retrouver les résultats de l'exercice 5 en introduisant la racine carrée de A.

3 Matrices de Gramm

Définition 3. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel. On appelle matrice de Gramm asssociée à un système $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E la matrice symétrique réelle :

$$G(u_1, \dots, u_n) = [(u_i|u_j)]$$

Le déterminant de cette matrice est appelé déterminant de Gramm du système $(u_1, \dots, u_n)$.

Proposition 9. *Avec les notations précédentes, soit G l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à $G(u_1, \dots, u_n)$. Le noyau de G est le noyau de l'application linéaire f de $\mathbf{R}^n$ dans E définie par :*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j u_j$$

Comme $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ *on en déduit* $\operatorname{rg} G(u_1, \dots, u_n) = \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_n)$

Proposition 10. *On garde les mêmes hypothèses et notations et on identifie les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ aux matrices unicolonnes canoniquement associées. Si l'on note $(\ ,\ )$ le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$, il vient alors pour tout vecteur $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$:*

$${}^tXG(u_1, \dots, u_n)X = (X, GX) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \right\|^2 \geq 0$$

Donc $G(u_1, \dots, u_n)$ est une matrice positive ; elle est définie positive si et seulement si le système $(u_1, \dots, u_n)$ est libre dans E. En particulier un déterminant de Gramm est toujours positif.

Exemple 3. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. A est la matrice de Gramm de n vecteurs de E si et seulement si elle est positive.

Proposition 11. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel. On se donne un système libre $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E. Si $x \in E$, la distance d de x au sous espace $F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est donnée par :*

$$d^2 = \frac{\det G(u_1, \dots, u_n, x)}{\det G(u_1, \dots, u_n)}$$

Exemple 4. Soit E l'espace préhilbertien réel des fonctions continues et de carré intégrable sur $]0, 1]$. Calculer la distance de la fonction ln sur le sous espace F de E engendré par $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.
Traitons cet exercice avec Maple.

```
u[1]:=1;u[2]:=x;u[3]:=x^2;u[4]:=ln(x);
S:=(f,g)->int(f*g,x=0..1);
f:=(i,j)->S(u[i],u[j]);
G:=matrix(4,4,f);
G1:=matrix(3,3,f);
```

Les matrices G et $G1$ valent respectivement :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & -1 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & -1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & -1/9 \\ -1 & -1/4 & -1/9 & 2 \end{bmatrix} \qquad G1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

La distance cherchée est donc donnée par la formule ci-dessus :

```
d:=sqrt(det(G)/det(G1));
```

Que Maple calcule :

$$d = \frac{1}{3}$$

Exercice 12. En raisonnant par récurrence et en utilisant la formule de la proposition 11, prouver que, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$:

$$0 < \det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Quel lien cette relation a-t-elle avec l'inégalité de Hadamard ? Étudier les cas d'égalité.

4 Décompositions matricielles classiques

4.1 Décomposition QR

4.2 Décomposition ^tTT

4.3 Décomposition OS

Table des matières