TD2 Espaces Euclidiens

PC*2

29 février 2004

1 Espaces préhilbertiens et euclidiens

1. (TPE et Centrale 98) Soit $E = \mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous espace de E défini par les équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

   Déterminer la projection orthogonale sur F *(NDLR : commencer par donner un sens à cet énoncé.)*

2. (Centrale 98) Condition suffisante pour que dans un espace préhilbertien E, on ait

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

   Démonstration.

3. (Mines 98) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que le plan d'équation

$$ax + by + cz = 0$$

   est stable par M si et seulement si le vecteur ${}^t(a, b, c)$ est un vecteur propre de ${}^tM$.

4. (Centrale 99) Aprés en avoir prouvé l'existence, calculer à l'aide de Maple :

$$\min_{(a,b,c)\in R^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \, \mathrm{d}t$$

   Peut-on généraliser ?

5. (Mines 98) On munit $\mathbf{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$(P,Q)=\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

   (a) Montrer l'existence d'une unique famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que :
   – Pour tout $k\in\mathbf{N}$, $\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^k)=\mathrm{Vect}(P_0,P_1,\dots,P_k)$.
   – Pour $k\in\mathbf{N}$, $(P_k,X^k)\geq 0$.

   (b) En considérant le polynôme $Q_n(X)=(-1)^nP_n(-X)$, montrer que P_n est de la parité de n.

   (c) Montrer que P_n possède n racines réelles simples dans l'intervalle $]-1,1[$. On prouvera, pour cela, que P_n possède des racines réelles d'ordre impair dans $]-1,1[$: a_1, a_2,…, a_p et on considèrera le polynôme :

$$R=\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)$$

6. (Mines et CCP 98) A quelle transformation correspond la matrice :

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-7&-4&4\\4&-8&-1\\-4&-1&-8\end{pmatrix}\ ?$$

7. (CCP 98) Soient $(\phi_i)_{1\leq i\leq p}$ des formes linéaires sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'elles sont indépendantes si et seulement si :

$$\dim\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}\,\phi_i=n-p$$

8. (CCP 98) Soit E un espace euclidien, $n\leq\dim E$. Soit $(e)=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs non nuls de E. Montrer qu'on a la propriété :

$$\forall x\in E,\ ||x||^2=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)^2$$

si et- seulement si (e) est une BON de E.

9. (Centrale 98) **Exercice principalement Maple** : Implémenter en Maple la projection orthogonale de X^{n+1} sur $\mathbf{R}_n[X]$, $\mathbf{R}[X]$ étant muni du produit scalaire :

$$(P,Q) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

Expliciter les calculs Maple pour $n = 2$, $n = 3$.

10. (X 98) Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients réels tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et :

$$\int_0^1 P_k(x)P_j(x)\sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \delta_{jk} \quad \text{si } j \neq k$$

Montrer que P_k possède k racines simples dans $]0,1[$.

11. (TPE 98) On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. muni d'une BON $(e) = (i,j,k)$. Si $u = a\,i + b\,j + c\,k$, on pose :

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{M} = \{M_u,\ u \in E\}$$

et $f_u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}(f_u,(e)) = M_u$.

(a) Structure algébrique de $\mathcal{M}$?

(b) On note $(v) = (v_1, v_2, v_3)$ le système de vecteurs de E défini, dans la base (e), par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Montrer que (v) est une BON de E et déterminer $\mathrm{Mat}(f_u,(v))$.

(c) CNS pour que $M_u \in \mathrm{O}(3)$?

(d) CNS pour que f_u soit une rotation ?

(e) On prend $u = \frac{1}{3}(2\,i + 2\,j - k)$. Que dire de f_u ?

12. (Mines 98) Déterminer les fonctions f de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout couple (u, v) de vecteurs orthogonaux de $\mathbf{Z}^2$ on ait :

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

13. (X 2000) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension impaire n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que E possède au moins un hyperplan stable par u.

2 Endomorphismes et matrices symétriques

1. (Centrale 99) Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   A l'aide de Maple, diagonaliser M et trouver une base orthonormale réduisant M.

2. (Centrale 99) Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. On note A la matrice symétrique de taille n : $A = (\alpha + u_i u_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à A lorsque $\alpha = 0$. Etudier $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{rg} A$ lorsque $\alpha \neq 0$.

3. (TPE 99) Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
   Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}$ en posant $< A|B >= \operatorname{Tr}({}^t A\, B)$.
   Soit $A \in \mathcal{M}$, montrer que l'endomorphisme de $\mathcal{M}$ défini par : $M \mapsto A\, {}^t M\, A$ est diagonalisable.

4. (X 99) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Pour $n \geq 2$, on pose $B(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbf{R})$. Situer les valeurs propres de A par rapport à celles de B. *[cf on peut utiliser l'exercice 16 ci-aprés].*

5. (Centrale 98 et 2002) Montrer qu'on définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ en posant : $||M|| = \sqrt{\operatorname{Tr}(M^2)}$.

6. (Centrale 98) Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\Phi(P) = (X^2 - 1)P" + XP'$$

(a) Avec Maple définir Φ et les images des vecteurs $f_{[k]} = x^k$ pour $0 \leq k \leq 3$.

(b) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ en posant :

$$(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

(c) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ symétrique pour $(\ ,\ )$.

(d) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que n^2 est valeur propre de Φ. Montrer que les sous espaces propres associés à deux entiers distincts sont orthogonaux. *On pourra dériver* $\sqrt{1-x^2}\,f'$.

7. (Centrale 98) Soit $E, (\ ,\ )$ un espace euclidien de dimension n.
   (a) Trouver les $f \in \mathcal{S}(E)$ tels que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x)) = 0$.
   (b) Soit $p \geq 2$ un naturel et p endomorphismes symétriques $u_1, \ldots, u_p$ de E tels que :
   $$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg} u_i = n \quad \text{et} \quad \forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{p} (x, u_i(x)) = ||x||^2$$
   Que peut-on dire de p ? Calculer $\sum_{i=1}^{p} u_i$.
   (c) Montrer que $E = \overset{\perp}{\bigoplus}{}_{i=1}^{i=p} \operatorname{Im} u_i$.
   (d) Donner des exemples de tels u_i.
8. (CCP 98) Conditions sur $\sigma_1 = p + q + r$ et $\sigma_2 = pq + qr + rp$ pour que la matrice réelle :
   $$A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{pmatrix}$$
   Vérifie $\lim A^n = 0$.
9. (Centrale 98) Montrer que l'application :
   $$(B, C) \mapsto B^t C$$
   définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour lequel les sous espaces $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux.
   Déterminer :
   $$\inf \left\{ \sum_{i,j} (a_{ij} - m_{ij})^2 \ /\ (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \right\}$$

10. (X 98 et 2000) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'elle est définie positive si et seulement si ses mineurs principaux sont strictement positifs.
11. (X 98) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :
    - A possède m vecteurs propres (réels) linéairement indépendants.
    - Il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, positive et de rang m telle que $AS = S^tA$
12. (X 98) Soit E un espace euclidien et $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $(a(x)|x) = 0$. Montrer que :

$$E = \operatorname{Ker} a \overset{\perp}{\oplus} H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} H_k$$

avec $\dim(H_i) = 2$, $H_i = \operatorname{Vect}(v_i, w_i)$ et $(a(v_i)|w_i) = -1$.

13. (X 98) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, définie positive. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, définies positives, telles que : $\det S \geq \alpha > 0$. Montrer que :

$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \operatorname{Tr}(SA) = n\,(\alpha \det A)^{1/n}$$

14. (X 98) Soit $A \in \mathcal{S}_{n+p}^{++}(\mathbf{R})$, définie par blocs sous la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline {}^tB & A_2 \end{array}\right) \qquad \text{avec} \quad A_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})\,, A_2 \in \mathcal{S}_p(\mathbf{R})\,, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$$

Montrer que

$$\det A \leq \det(A_1)\det(A_2)$$

15. (X 98 et 2001) Soient M et N deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_3^{++}(\mathbf{R})$. On pose :

$$\operatorname{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$$

$$\operatorname{Sp}(N) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} \quad \text{avec} \quad \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$$

Montrer que

$$\operatorname{Tr}(MN) \leq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mu_i$$

16. (X 98) On se place dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ de valeurs propres (λ_i) avec :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

On note $(V_1, \ldots, V_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés. On pose, pour $X \in \mathbf{R}^n - \{0\}$, $\phi(X) = \frac{(MX|X)}{(X|X)}$. et

$$W_k = \text{Vect}(V_1, \ldots, V_k)$$

(a) Montrer que
$$\max_{X \in W_k - \{0\}} \phi(X) = \lambda_k$$

(b) Montrer que
$$\min_{\substack{X \perp W_{k-1} \\ X \neq 0}} \phi(X) = \lambda_k$$

(c) Calculer
$$\min_{\dim W = k} \left(\max_{X \in W - \{0\}} \phi(X) \right)$$

17. (X 98) Soient α, β, x, y des réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$.
Soient A et B deux matrices réelles positives. Montrer que :

$$(\det A)^\alpha \det(B)^\beta \leq \det(\alpha A + \beta B)$$

18. (X 98) Déterminer les formes bilinéaires ϕ sur un espace vectoriel réel E de dimension finie vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x, y) = 0 \Rightarrow \phi(y, x) = 0$$

19. (X 2000) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et D diagonale définie positive telles que :

$$A = PD + DP$$

20. (X 2003) Soient A et B deux matrices symétriques définies positives de taille $n \geq 2$. On note A_1 et B_1 les deux matrices respectivement obtenues à partir de A et B en y supprimant la première ligne et la première colonne.
    (a) Montrer que :
    $$\forall Y \in \mathbf{R}^n - \{0\},\ \frac{1}{(Y|A^{-1}Y)} = \inf_{\substack{X \in \mathbf{R}^n \\ (X|Y) \neq 0}} \frac{(X|AX)}{(X|Y)^2}$$
    (b) Prouver l'inégalité :
    $$\frac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)} \geq \frac{\det A}{\det A_1} + \frac{\det B}{\det B_1}$$

3 Indications

Les indications sont en italique

1. (X98) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'elle est définie positive si et seulement si ses mineurs "diagonaux" sont strictement positifs.

   Première méthode *Commencer par prouver que si A et A' sont deux matrices symétriques qui représentent la même forme bilinéaire symétrique dans deux bases différentes dont P est la matrice de passage alors $A' =^t PAP$. Introduire ensuite la forme bilinéaire symétrique B canoniquement associée à S et B_k la restriction d'icelle à $V_k \times V_k$ où $V_k = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$ $(1 \leq k \leq n)$. Supposer que B_{k-1} est définie positive et introduire une base $(e_1, \ldots, e_{k-1})$ de V_{k-1}, orthonormée pour B_{k-1}. Fabriquer ensuite un vecteur $f_k \in V_k$ tel que $f_k - \epsilon_k \perp V_{k-1}$ pour B_k et examiner la matrice de B_k par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_{k-1}, f_k)$ pour conclure par récurrence sur k.*

   Deuxième méthode *Raisonner par récurrence sur n en introduisant $\Pi\, A_{|H}$ où Π est un projecteur orthogonal ad hoc d'image l'hyperplan H.*

2. (X 98) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   – A possède m vecteurs propres (réels) linéairement indépendants.

– Il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, positive et de rang m telle que $AS = S^tA$
Pour $m = n$ reconnaitre un exercice traité en cours. Utiliser une technique de blocs en travaillant sur l'espace engendré par les vecteurs propres et son orthogonal. Pour la réciproque cet espace est $\operatorname{Im} S$

3. (X98) Soit E un espace euclidien et $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $(a(x)|x) = 0$. Montrer que :

$$E = \operatorname{Ker} a \overset{\perp}{\oplus} H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} H_k$$

avec $\dim(H_i) = 2$, $H_i = \operatorname{Vect}(v_i, w_i)$ et $(a(v_i)|w_i) = -1$.

Commencer par prouver que $E = \operatorname{Ker} a \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} a$. Se ramener au cas où a est un automorphisme. Prouver alors que $n = \dim E$ est pair et que si x est un vecteur propre de a^*a, $\operatorname{Vect}(x, a(x))$ est un plan stable par a. Conclure par une récurrence judicieuse.

4. (X 98) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, définie positive. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, définies positives, telles que : $\det S \geq \alpha > 0$. Montrer que :

$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \operatorname{Tr}(SA) = n\,(\alpha \det A)^{1/n}$$

Il suffit de calculer dans une base convenable

5. (X98) Soit $A \in \mathcal{S}_{n+p}^{++}(\mathbf{R})$, définie par blocs sous la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline {}^tB & A_2 \end{array}\right) \qquad \text{avec} \;\; A_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})\,, A_2 \in \mathcal{S}_p(\mathbf{R})\,, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$$

Montrer que

$$\det A \leq \det(A_1)\det(A_2)$$

Commencer par redémontrer l'inégalité de Hadamard : $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$ en utilisant la décomposition $A =^t TT$ vue en cours. Adapter la méthode par blocs en utilisant un résultat démontré en cours.

6. (X 98, 2001) Soient M et N deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_3^{++}(\mathbf{R})$. On pose :

$$\operatorname{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \quad \text{avec} \;\; \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$$
$$\operatorname{Sp}(N) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} \quad \text{avec} \;\; \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$$

Montrer que

$$\operatorname{Tr}(MN) \leq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mu_i$$

Introduire les endomorphismes f et g canoniquement associés à M et N. Observer que, si (e) est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique alors $\operatorname{Tr} fg = \sum_{i=1}^{3}(e_i|fg(e_i))$. Prouver, à l'aide d'une base convenable que :

$$(e_3|f(e_3)) \leq \lambda_3 \quad (e_2|f(e_2)) + (e_3|f(e_3)) \leq \lambda_2 + \lambda_3$$

$$(e_1|f(e_1)) + (e_2|f(e_2)) + (e_3|f(e_3)) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

puis choisir une base (e) convenable et calculer un peu. dans la cas n il peut être utile d'utiliser l'exercice suivant.

7. (X98) On se place dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ de valeurs propres (λ_i) avec :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

On note $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres associés. On pose, pour $X \in \mathbf{R}^n$, $\phi(X) = (MX|X)$. et

$$W_k = \operatorname{Vect}(V_1, \ldots, V_k)$$

(a) Montrer que

$$\max_{X \in W_k} \phi(X) = \lambda_k$$

(b) Montrer que

$$\min_{X \perp W_{k-1}} \phi(X) = \lambda_k$$

(c) Calculer

$$\min_{\dim W = k} \left(\max_{X \in W} \phi(X) \right)$$

Pour la dernière question, observer que $W \cap \operatorname{Vect}(V_k, \ldots, V_n) \neq \{0\}$.

8. (X98) Soient α, β, x, y des réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$.
Soient A et B deux matrices réelles positives. Montrer que :

$$(\det A)^\alpha \det(B)^\beta \leq \det(\alpha A + \beta B)$$

S'inspirer d'un exercice traité en cours en commençant par traiter les cas où A et B commutent puis se ramener à $B = \mathrm{I}_n$

9. (X98) Déterminer les formes bilinéaires ϕ sur un espace vectoriel réel E de dimension finie vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x, y) = 0 \Rightarrow \phi(y, x) = 0$$

Commencer par traiter le cas où $\dim E = 2$*. Prouver alors que* f *est soit symétrique soit antisymétrique. En déduire que, dans le cas général on a* $f(y, x) = \pm f(x, y)$ *; fixer alors* x *et considérer les deux sous espaces* $\{y \,/\, f(x, y) = f(y, x)\}$ *et* $\{y \,/\, f(x, y) = -f(y, x)\}$ *dont la réunion vaut* E*. On peut aussi, en dimension finie, représenter* f *par un endomorphisme* a *et prouver que* $a^* = \pm a$*.*