TD ESPACES EUCLIDIENS ET HERMITIENS

PC*2

27 janvier 2004

Table des matières

1 Espaces préhilbertiens

Sauf précision contraire, $(E, (\ |\ ))$ est un espace préhilbertien réel. La norme associée est notée $|| \quad ||$.

1. (X 2000) Soit F un sous espace de E. Que dire de $x \in E$ tel que :
$$\forall f \in F,\ (x|f) \leq (f|f)\ ?$$
2. (Cen 97) $\dim E = 3$, E est rapporté à une base orthonormale (e). Soit P le plan d'équation
$$2x + y + 2z = 0$$
et $D = P^{\perp}$. Trouver les matrices, relativement à (e) de :
   - La projection orthogonale sur P.
   - La projection orthogonale sur D.
   - La symétrie orthogonale relativement à P.

   - La symétrie orthogonale relativement à D.
3. (X 99) Soit $(G\,,\,.)$ un groupe fini de cardinal n. On note $E = \mathcal{F}(G, \mathbf{C})$.
   - Montrer que E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie à préciser. En donner une base.
   - Pour f et g dans E, on pose :
   $$(f|g) = \frac{1}{n}\sum_{u \in G} \overline{f(u)} g(u)$$
   Montrer que c'est un produit scalaire sur E et, que pour tout $u \in G$, l'application T_u de E dans E définie par :
   $$f \mapsto \big(v \mapsto f(vu^{-1})\big)$$
   conserve le produit scalaire.
4. (Cen 97) soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On pose $A^* = {}^t\bar{A}$. Démontrer l'inégalité :
$$|\operatorname{Tr}(A)| \leq \sqrt{n \operatorname{Tr}(AA^*)}$$
5. (Cen 97) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des complexes non tous nuls et A la matrice :
$$A = (x_i \overline{x_j})_{1 \leq i,j \leq n}$$
Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A.
6. (Mines 97) Soit f une fonction continue, de carré intégrable sur $I =]0, 1[$. Peut-t'on avoir simultanément :
$$\int_I \left(f(x) - e^x\right)^2 dx \leq 4 \quad \text{et} \quad \int_I \left(f(x) - e^{-x}\right)^2 dx \leq 1\ ?$$
7. (ENSP97) Soit $f \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbf{R})$, positive et telle que les fonctions f et xf soient de carré intégrable sur $]0, +\infty[$. Prouver que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :
$$\int_{]0,+\infty[} f \leq 2\left(\int_{]0,+\infty[} f^2\right)^{1/4}\left(\int_{]0,+\infty[} x^2 f^2\right)^{1/4}$$

8. Soient x et y appartenant à E, prouver et interpréter géométriquement *l'égalité de la médiane* :
$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$
Réciproquement soit N une norme sur un $\mathbf{R}$ espace vectoriel E satisfaisant à l'égalité de la médiane. On pose pour $x, y \in E$:
$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2\right)$$
   (a) Prouver, pour tous $x, y, z \in E$ que :
$$f\left(x, \frac{y+z}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(x,z)\right)$$
   (b) Prouver que, pour x, y fixés, la fonction :
$$t \mapsto f(x, ty)$$
   est continue. La déterminer.

   Montrer que N est une norme euclidienne.
9. Soit (a_n) une suite de réels ≥ 0. Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n+1} < \infty$$
10. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, k un entier ≥ 2. Montrer qu'il existe des entiers relatifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *non tous nuls* tels que :
   i) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ |a_i| \leq k-1$.
   ii) $|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \dfrac{k-1}{k^n - 1}\sqrt{n}$.
11. E est euclidien de dimension 4 rapporté à une base orthonormée (e). Soit $a\ (1,1,1,1)$ et $b\ (0,2,0,3)$. Ecrire la matrice dans (e) de la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}(a,b)$. Trouver une base orthonormée de $F^{\perp}$. Calculer $d(u,F)$ pour $u(1,-1,1,-1)$.
12. Même exercice que le précédent où F est défini par les équations :
$$\begin{cases} x+y+t = 0 \\ x+z+t = 0 \end{cases}$$

13. Soit $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :
$$\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$
   Montrer que (e) est une base orthonormée de E.
14. (Mines et Espci 2000) E est euclidien de dimension n. On considère un système $e_1, \ldots, e_p$ de vecteurs de E vérifiant $(e_i|e_j) < 0$ pour chaque couple (i,j) d'indices distincts.
   (a) Prouver que si $\sum_{j=1}^p x_j e_j = 0$ alors $\sum_{j=1}^p |x_j| e_j = 0$.
   (b) Quel est le plus grand indice p pour lequel un tel système existe ?
15. (X 99) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes $Q \in \mathbf{R}_2[X]$ tels que $Q(1) = 1$. On pose $f(P) = \int_0^1 P^2(x)\,\mathrm{d}x$. Caractériser :
$$\{P \in \mathcal{E}\ /\ f(P) = \inf\{f(Q),\ Q \in \mathcal{E}\}\}$$
16. (X 96) On munit $\mathbf{R}_n[X]$ du produit scalaire :
$$(P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$
   (a) Montrer que la famille $(Q_j)_{0 \leq j \leq n}$ définie par :
$$Q_j(x) = \frac{d^j}{dx^j} x^j (1-x)^j$$
   est une base orthogonale de cet espace.
   (b) Soit $F_{k,n}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ dont le coefficient de x^k vaut 1. Montrer que :
$$\inf_{P \in F_{k,n}} \int_0^1 P^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2k+1)(C_{2k}^k)^2 (C_{n+k+1}^{2k+1})^2}$$
17. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire :
$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$
   On note δ la forme linéaire sur E définie par :
$$f \mapsto f(0)$$
   et $H = \mathrm{Ker}\,\delta$.

(a) Exhiber une droite D telle que $E = H \oplus D$.
(b) Montrer que δ ne peut se représenter par aucun vecteur de E relativement au produit scalaire $(\ |\ )$.
(c) Que dire de $H^{\perp}$? Conclusion ?

18. (ENSL) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ $n+1$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, (\ ,\ ))$ tels que :

$$\forall x \in E,\ (a_1, x) = 0, (a_2, x) = 0, \ldots, (a_n, x) = 0 \Rightarrow (a, x) = 0$$

Prouver que $a \in \text{Vect}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
(a) Soit $g \in \mathcal{C}_0([a, b], \mathbf{R})$ telle que : pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbf{R})$ telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$, l'on ait $\int_a^b g(t) f''(t) dt = 0$. Prouver que g est affine.
(b) Enoncer et démontrer un résultat analogue à celui de la première question avec $n+1$ formes linéaires sur un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie.
(c) Compte tenu de l'étude faite dans le premier exercice, comment pourrait on généraliser ce résultat à un espace qui n'est pas de dimension finie ?

19. (a) Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un système de n vecteurs d'un espace euclidien E de dimension n. Démontrer que le scalaire $|\det_{(e)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ est indépendant de la base orthonormée (e) choisie dans E et que :

$$|\det_{(e)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} ||x_i||$$

(inégalité de Hadamard que l'on interprétera géométriquement)
(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, prouver que :

$$|\det A| \leq n^{\frac{n}{2}} \left(\max_{i,j} |a_{i,j}| \right)^n$$

2 Endomorphismes et matrices remarquables

20. (Centrale et Mines 2002) Soit E un espace euclidien de dimension 3. Si u et v sont deux vecteurs non nuls de E de même norme, trouver tous les demi-tours r tels que $r(u) = v$. Même question avec deux droites vectorielles de E.

21. (Centrale 2003) Soit E un espace euclidien de dimension n, $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$, $(z_i)_{1 \leq i \leq p}$ deux familles de p vecteurs de E $(p \leq n)$ telles que, pour tout i et j, $(y_i | y_j) = (z_i | z_j)$. Montrer l'existence de $u \in \text{O}(E)$ tel que, pour tout i, $u(y_i) = z_i$.

22. (Centrale 2001) Soit $A = (\alpha_{i,j})$ une matrice orthogonale. Prouver :

$$\left| \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \right| \leq n$$

23. (Centrale 2002) Soit A une matrice antisymétrique. Montrer que $\text{I}_n + A$ est inversible et que $Q = (\text{I}_n - A)(\text{I}_n + A)^{-1}$ est orthogonale et n'admet pas la valeur propre -1. Réciproquement, soit Q une matrice orthogonale n'admettant pas la valeur propre -1, montrer l'existence d'une unique matrice antisymétrique A telle que $Q = (\text{I}_n - A)(\text{I}_n + A)^{-1}$.

24. On se place dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure canonique. Prouver que trois vecteurs d'affixes a, b, c dans le plan $z = 0$ sont les projections orthogonales sur ce plan de trois vecteurs A, B, C, orthogonaux deux à deux et de même norme si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

25. Un espace euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à une orthonormée directe. Etudier les endomorphismes dont les matrices sont :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

26. (Ensea 2003) Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe (i, j, k), écrire la matrice de la rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'axe dirigé par $u = i + j - k$.

27. (Cen 2000) Prouver que la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

représente une rotation si et seulement si a, b, c vérifient les relations :

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 & = & 1 \\ a+b+c & = & 1 \end{cases}$$

Et que ces conditions équivalent à ce qu'ils soient racines d'une équation du type :

$$x^3-x^2+k=0 \text{ avec } 0 \leq k \leq \frac{4}{27}$$

On pose $k=\frac{4\sin^2\phi}{27}$. Expliciter les matrices correspondantes et les axes et angles des rotations associées.

28. (Cen 97) Quels sont les endomorphismes de l'espace euclidien E qui commutent à tous les éléments de $O(E)$?
29. (Centrale 2001) Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ où E est un espace euclidien. Prouver l'existence d'une base orthonormale de E où la matrice de E est diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & R(\theta_1) & & & \\ & & & R(\theta_2) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

et $R(\theta)$ est la matrice habituelle de la rotation d'angle θ.

30. (Cen 97) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, prouver que :

$$\det(\mathrm{I}_n + A^tA) \geq 0$$

31. (Centrale 2003) soient f et g deux endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que :

$$f^* \circ f = g^* \circ g \Leftrightarrow \exists u \in \mathrm{O}(E) \;/\; g = u \circ f$$

32. (Centrale) E est euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall x \in E,\ ||f(x)|| \leq ||x||$$

(a) Prouver que
$$E = \mathrm{Ker}(f-Id) \oplus \mathrm{Im}(f-Id)$$
(b) Indépendamment de la première question prouver que :
$$\forall x \in E,\ ||f^*(x)|| \leq ||x||$$
(c) Que dire de l'endomorphisme $\mathrm{Id} - f^*f$?
(d) Montrer que si $f(x)=x$ alors $f^*(x)=x$. Retrouver le résultat de la première question.

33. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ telle que $f(0)=f(1)=0$. Trouver une constante C_n indépendante de f telle que :

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq C_n \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2$$

En déduire la meilleure constante C indépendante de f telle que :

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leq C\int_0^1 f'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

(Inégalité de Poincaré)

34. (Centrale 2001) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ en posant $(A|B) = \mathrm{Tr}\,({}^tA\,B)$. Montrer que $M \mapsto A\,{}^tM\,A$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
35. (1996) Montrer que $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Etudier la distance d'une matrice A à $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
36. (1996) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2=A$. Prouver les inégalités :

$$\sum_{i,j} a_{i,j} \leq n \text{ et } \sum_{i,j}|a_{i,j}| \leq n\sqrt{\mathrm{rg}\,A}$$

.

37. (1996) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver que $\mathrm{rg}\,A = 1$ si et seulement si existent deux matrices unicolonnes X et Y telles que $A = X^tY$. Condition nécessaire et suffisante sur X et Y pour que A soit la matrice d'un projecteur orthogonal. Caractériser alors ce projecteur.

38. (X 2000) Soit E un espace euclidien, $u\,v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$ et $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} v^*$. Montrer que, si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$ alors $\operatorname{Ker} u \circ v = \operatorname{Ker}(u \circ v)^*$. Réciproque ?
39. (Mines 97) Soit E un espace euclidien. On pose :
$$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{L}(E),\ uu^*u = u\}$$
Montrer l'équivalence entre :
– $u \in F$.
– u^*u est un projecteur orthogonal.
– uu^* est un projecteur orthogonal.
– Pour tout $x \in (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$, $||u(x)|| = ||x||$.
40. (Mines 2000) Dans un espace euclidien de dimension n, prouver l'existence d'un système $(u_1, \dots, u_n)$ unitaires tel que :
$$||u_i - u_j|| = 1 \text{ si } i \neq j$$
Montrer qu'elle est unique à isométrie près.
41. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n, prouver que :
$$\operatorname{Tr}(A^2 + A + I_n) \geq \frac{3n}{4}$$
42. (Centrale 2001) Prouver que les valeurs propres de la matrice
$$\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$
sont strictement positives.
43. (1996) trouver :
$$\inf\{\lambda \in \mathbf{R}, \forall P \in \mathbf{R}_2[X],\ \int_0^1 P'(t)^2 dt \leq \lambda \int_0^1 P(t)^2 dt\}$$
44. (Centrale 2001 et 2001)-
   (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, $k \in \mathbf{N}$. Montrer qu'existe une unique $A' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ telle que $A'^k = A$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A' = P(A)$.

   (c) Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, montrer que $\operatorname{Sp}(A\,B) \subset \mathbf{R}_+$ et $\operatorname{Tr}(A\,B) \in \mathbf{R}_+$.
45. (ENSL) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Prouver que, pour toute base orthonormée $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ de $\mathbf{R}^n$ *(modulo l'identification habituelle d'un vecteur et de sa matrice canoniquement associée)*,
$$\prod_{i=1}^n {}^tU_iAU_i \leq \left(\frac{\sum\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} \lambda}{n}\right)^n$$
46. (a) (Synthèse de divers oraux) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, établir l'existence et l'unicité d'un couple $(Q, R) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{T}^+(n, \mathbf{R})$ tel que $A = QR$. *(on verra en informatique comment obtenir cette décomposition de manière efficace)*
   (b) Généraliser ce résultat (sans l'unicité) à toute matrice carrée A réelle d'ordre n.
   (c) Soit A une matrice symétrique positive c'est à dire :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ {}^tXAX \geq 0$$
   Prouver l'existence de $T \in \mathcal{T}^+(n, \mathbf{R})$ telle que $A =^t TT$. En déduire que :
$$0 \leq \det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$$
   Relier cette question à l'exercice précédent.
47. (X 99 et 2003, 2002, INT 2002) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $c > 0$ tel que, pour tout couple $(i, j) \in [|1, n|]^2$, on ait $|a_{ij}| \leq c$. On pose $B =^t A\,A$.
   (a) Montrer que
$$\det B \leq \left(\frac{\operatorname{Tr}(B)}{n}\right)^n$$
   (b) Montrer que $|\det A| \leq c^n n^{n/2}$.
48. (ENSP 97) Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il existe S symétrique positive et U orthogonale telles que $A = SU$. (On pourra se limiter au cas où A est inversible).

49. (Mines) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E, prouver l'existence d'une base orthonormée de E dont l'image par f soit une famille orthogonale.
50. (Mines) Prouver que, si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, il existe $\Omega_1 \in \mathrm{O}_p(\mathbf{R})$ et $\Omega_2 \in \mathrm{O}_q(\mathbf{R})$ telles que la matrice $\Omega_1 A \Omega_2$ soit diagonale à coefficients ≥ 0.
51. (ENSP 97) Toutes les matrices considérées sont symétriques, réelles, de taille n. On range un système de valeurs propres de A en décroissant :
$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$$
    (a) Prouver :
    $$\lambda_1(A+B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$$
    (b) Prouver :
    $$\lambda_1(A+B) + \lambda_2(A+B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \lambda_1(A) + \lambda_2(B)$$
52. (X 97) Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives telles que $B - A$ soit positives. Montrer que :
$$\det A \leq \det B$$
Interprétation géométrique ?
53. (ENSP 97) Soient A et B deux matrices symétriques réelles, définies positives. Prouver que $M = (a_{ij} b_{ij})$ est définie positive.
54. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ et positive. Soit $[a,b] \subset [0,1]$. On note A et B les matrices d'ordre n et d'éléments respectifs :
$$a_{ij} = \int_a^b f(x) x^{i+j}\,\mathrm{d}x \text{ et } b_{ij} = \int_0^1 f(x) x^{i+j}\,\mathrm{d}x$$
Comparer $\det A$ et $\det B$.
55. Soit (x_n) une suite de vecteurs d'un espace préhilbertien E. On note $G(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de Gramm constitué des n premiers vecteurs. Montrer que :
$$G(x_1, \ldots, x_{p+q}) \leq G(x_1, \ldots, x_p)\, G(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$$

27 janvier 2004

56. (1996) Orthocodiagonalisation d'une famille finie commutative de matrices symétriques réelles.
57. (Mines) Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E de dimension n. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :
    i) Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et un projecteur orthogonal π de E tel que $\pi(e_i) = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
    ii) Le spectre de la matrice de Gramm des x_i est contenu dans $\{0,1\}$.
58. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable
59. (ENSP 97) Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Montrer, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ l'équivalence entre :
    – Il existe un vecteur a tel que, pour tout $v \in E$, $f(v) = a \wedge v$.
    – Pour tout $v \in E$, $f(v) \perp v$.
60. Soit u un endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien E c'est à dire tel que $u^* = -u$.
    (a) Montrer que $(x, u(x)) = 0$ pour tout x et que $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est stable par u.
    (b) En déduire que $\operatorname{rg} u$ est pair.
    (c) Que dire de u^2 ? Montrer que les racines non nulles du polynôme caractéristisque de u sont des imaginaires purs.
61. Montrer que toute matrice antisymétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & & \\ & A_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A_p & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
Où les A_i sont des matrices canoniquement associées à des similitudes d'angle $\pi/2$.

62. (CP 2001) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. telle que :

$$\mathrm{Sp}\left({}^tA\,A - A\,{}^tA\right) \subset \mathbf{R}_+$$

montrer que ${}^tA\,A = A\,{}^tA$.

63. (X 2003) Soit s une symétrie d'un espace euclidien. Prouver que :

$$\det\left(\frac{\mathrm{Id} + s^* s}{2}\right) \geq 1$$

Étudier le cas d'égalité.
Soit A une matrice symétrique définie positive et $O \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ telle que $O^2 = \mathrm{I}_n$. Prouver l'inégalité :

$$\det\left(\frac{A + OAO}{2}\right) \geq \det A$$

3 Applications géométriques

$\mathcal{E}_n$ est un espace affine euclidien de dimension n, de direction E_n. Le produit scalaire sur E_2 est noté $(\ ,\ )$, la norme associée est notée $||\quad||$.

64. Soit u un endomorphisme symétrique positif de E_n c'est à dire que, pour tout $x \in E_n$, $(x, u(x)) \geq 0$. Prouver l'existence d'un unique endomorphisme symétrique positif h tel que $u = h^2$. *(h s'appelle la racine carrée de u et se note $\sqrt{u}$)*

65. Soit ABC un triangle dont G est le centre de gravité. Prouver l'existence d'un produit scalaire S sur E_2 tel que :
    - ABC soit équilatéral pour la structure euclidienne définie par S.
    - L'une des valeurs propres de l'endomorphisme symétrique u qui représente S relativement à $(\ ,\ )$ vaut 1.

    En déduire l'existence d'une affinité orthogonale (pour $(\ ,\ )$) qui transforme ABC en triangle équilatéral (pour $(\ ,\ )$). Mêmes questions avec un triangle rectangle isocèle.

66. (X 2001) Soit $u \in \mathcal{S}(E_n)$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ de E_n telle que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(e_i, u(e_i)) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

67. Soit $(\mathcal{E})$ *l'ellipsoïde* de $\mathcal{E}_n$ défini par la relation :

$$(\overrightarrow{OM}, f(\overrightarrow{OM})) = 1$$

où f est un endomorphisme symétrique défini positif et O un point fixé de $\mathcal{E}_n$.
    (a) Démontrer que $(\mathcal{E})$ n'a qu'un seul centre de symétrie.
    (b) Soient $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points de $(\mathcal{E})$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{OM_i}$ soient deux à deux orthogonaux. Prouver que la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{||\overrightarrow{OM_i}||^2}$$

    est constante.
    (c) (X 2001) Trouver le lieu des points $M \in \mathcal{E}_n$ d'où l'on peut mener à $\mathcal{E}$ n tangentes deux à deux orthogonales.
    (d) Démontrer que, si $M \in (\mathcal{E})$, la droite $M + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ est tangente à $(\mathcal{E})$ si et seulement si $(f(\overrightarrow{OM}), \overrightarrow{u}) = 0$; on appelle alors *hyperplan tangent à* $(\mathcal{E})$ *en* M l'hyperplan affine constitué des points de la forme $M + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est un tel vecteur. Trouver le lieu des points M d'où l'on peut mener à $(\mathcal{E})$ n hyperplans tangents deux à deux orthogonaux.

68. Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de $\mathcal{E}_n$. d'un point $A \in (\mathcal{S})$ on mène n droites deux à deux orthogonales. Montrer que l'hyperplan affine engendré par les extrémités des n points d'intersections, autres que A, de ces n droites avec la sphère passe par un point fixe.

69. Dans l'espace, on fait tourner une conique de foyer F autour de son axe focal. Soit $(\mathcal{S})$ la surface ainsi engendrée. Un plan ne contenant pas F coupe $(\mathcal{S})$ suivant une courbe (C). Montrer que le cône de sommet F s'appuyant sur (C) est de révolution.

70. Trouver les plans qui coupent le cône d'équation $2x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ suivant deux génératrices orthogonales. Existe-t-il des plans qui coupent ce cône suivant un cercle ?

71. Lieu des sommets des cônes qui s'appuient sur le cercle :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x + y + z = 1$$

et qui coupent le plan xOy suivant une hyperbole équilatère.