ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMES

Deuxième partie

25 mars 2001

- **K** désigne **R** ou **C**.
- Les applications étudiées dans cette partie sont définies sur une partie A d'un **K**-EVN $(E, || \quad ||)$, de dimension finie, et à valeurs dans un autre $(F, || \quad ||)$.

1 Vocabulaire topologique

1.1 Ouverts

Proposition 1 (Parties ouvertes). *Une partie $U \subset E$ est dite* <u>*ouverte*</u> *si elle possède la propriété suivante : pour tout point $x \in U$, il existe un réel $r > 0$ (dépendant du point x) tel que $B(x, r) \subset U$. On dit aussi que U est un ouvert de E.*

Remarque 1. Cette notion ne dépend pas de la norme vu qu'elle sont toutes équivalentes.

Proposition 2. *Les boules ouvertes sont des ouverts. Les intervalles "ouverts" de* **R** *sont des ouverts.*

Démonstration. Soit $R > 0$ et $U = B(a, R)$. Soit $x \in U$ et $r = R - \mathrm{d}(x, a) > 0$. Prouvons (**faire un dessin**) que $B(x, r) \subset U$.
Soit $y \in B(x, r)$. Il vient :

$$\mathrm{d}(y, a) \leq \mathrm{d}(y, x) + \mathrm{d}(x, a) < r + \mathrm{d}(x, a) = R$$

donc $y \in U$ et le résultat en libérant y.
Les lecteurs sont invité à prouver qu'un intervalle réel de la forme $]a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ est un ouvert de **R**. □

Proposition 3. *Quelques propriétés très générales :*

1. *E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.*
2. *Si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une famille* **quelconque** *d'ouverts de E il en est de même de leur réunion définie par :*
$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \{x \in E,\ \exists i \in I,\ x \in \Omega_i\}$$
3. *Si $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille* **finie** *d'ouverts de E il en est de même de leur intersection définie par :*
$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \Omega_i = \{x \in E,\ \forall i \in [|1, n|],\ x \in \Omega_i\}$$

Démonstration. 1. Evident.

2. Posons $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Soit $x \in \Omega$. Par définition de Ω, il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in \Omega_{i_0}$. Comme Ω_{i_0} est ouvert, il existe un $r > 0$ tel que :
$$B(x, r) \subset \Omega_{i_0} \subset \Omega$$
3. Posons $\Omega = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \Omega_i$. Soit $x \in \Omega$. Par définition de Ω, pour tout $i \in [|1, n|]$, $x \in \Omega_i$. Fixons un tel i. Comme Ω_i est ouvert, il existe un $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset \Omega_i$. Posons alors
$$r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$$
$B(x, r)$ est contenue dans toutes les boules $B(x, r_i)$ donc dans Ω.

□

Exercice 1. Donner un exemple d'intersection infinie d'ouverts qui n'en soit pas un.

Exercice 2. Soit U un ouvert non vide de E, a un point de E. Prouver que :

$$a + U = \{a + x,\ x \in U\}$$

est un ouvert. Prouver que si A est une partie quelconque, non vide de E alors :

$$A + U = \{a + x,\ (a, x) \in A \times U\}$$

est un ouvert.

Définition 1 (Points intérieurs à une partie). On dit qu'un point $a \in E$ est intérieur à une partie $A \subset E$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Exercice 3. Pour se familiariser avec ces notions.

1. Prouver que l'ensemble des points intérieurs à une partie A est un ouvert appelé *l'intérieur de A* [1].
2. Caractériser les ouverts à l'aide de cette notion.
3. Prouver que si U est un ouvert contenu dans A il est contenu dans son intérieur.
4. Déterminer l'intérieur d'un segment, l'intérieur d'une boule fermée.

Exercice 4. De la bonne utilisation du critère de Cauchy.
Soit U un ouvert non vide et borné de E tel que, pour tout couple (x, y) de points de U, il existe une boule ouverte B vérifiant :

$$\{x, y\} \subset B \subset U$$

on se propose d'établir que U est une boule ouverte.

1. Prouver l'existence de

$$\delta(U) = \sup_{(x,y)\in U\times U} \mathrm{d}(x, y)$$

   Montrer que $\delta(U) > 0$ et établir l'existence d'une suite (x_n) et d'une suite (y_n) de points de U telles que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_n, y_n) = \delta(U)$.
2. Justifier l'existence d'un point $a_n \in E$ et d'un réel $r_n > 0$ tels que :

$$\{x_n, y_n\} \subset B(a_n, r_n) \subset U$$

   Prouver que la suite (r_n) converge vers un réel r que l'on calculera.
3. Soient p et q deux naturels, montrer que :

$$\mathrm{d}(a_p, a_q) \leq \delta(U) - r_p - r_q$$

   en déduire que la suite (a_n) converge vers un élément $a \in E$.
4. Soit $x \in B(a, r)$. En considérant la suite de terme général $r_n - \mathrm{d}(x, a_n)$, prouver que $x \in U$.
5. Démontrer que $U = B(a, r)$

[1] Cette terminologie est explicitement hors programme

1.2 Fermés

Proposition 4. *Une partie de E est fermée si et seulement si son complémentaire est un ouvert.*

Démonstration. Soit F une partie de E séquentiellement fermée au sens vu dans la première partie de ce cours. Prouvons d'abord que $U = E - F$ est un ouvert. Pour cela on va raisonner par contraposition. On va supposer que U n'est pas ouvert et construire une suite (f_n) **convergente** de points de F dont la limite n'est pas dans F. Dire que U n'est pas ouvert c'est nier la proposition suivante :

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset U$$

cette négation s'écrit :

$$\exists x \in U,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \not\subset U$$

Choisissons $r_n = \frac{1}{n+1}$. Puisque $B(x, r_n)$ n'est pas contenue dans U c'est qu'il existe au moins un $f_n \in B(x, r_n)$ qui n'appartient pas à U donc qui appartient à F. La suite (f_n) est donc une suite d'éléments de F qui converge vers $x \notin F$, ce qu'on voulait.
Réciproquement Soit F une partie de E telle que $U = E - F$ soit ouverte. Prouvons qu'elle est séquentiellement fermée. Soit (f_n) une suite d'éléments de F qui converge vers $x \in E$. Prouvons que $x \in F$. Si ce n'était pas le cas, x appartiendrait à $U = E - F$ qui est ouvert. Il existerait donc un réel $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$; mais alors on aurait $\mathrm{d}(f_n, x) \geq r$ pour tout n et la suite (f_n) ne saurait converger vers x. Donc $x \in F$. □

Remarque 2. Le point de vue adopté peut paraître iconoclaste. Les puristes définissent en effet les fermés comme les complémentaires des ouverts. Cependant la caractérisation séquentielle est la manière la plus efficace de prouver qu'une partie est fermée **voire ouverte en montrant que son complémentaire est fermée**. Quoiqu'il en soit, **la preuve ci-dessus est au programme et connue en question de cours sous le titre "caractérisation séquentielle des fermés"**

Exemple 1. On munit $\mathbf{R}^3$ d'une norme. L'ensemble U défini par :

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^3 - y^2 + \sin xz > 0\}$$

est un ouvert. Il suffit de montrer que son complémentaire F défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^3 - y^2 + \sin xz \leq 0\}$$

est séquentiellement fermé ce qui est facile.

Exercice 5. Prouver qu'une boule fermée est un fermé. Une sphère est-t-elle fermée ?

Proposition 5. *Quelques propriétés générales obtenues par passage au complémentaire des propriétés décrites dans la proposition 3 :*

1. *E et $\emptyset$ sont des fermés de E.*
2. *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille* **quelconque** *de fermés de E il en est de même de leur intersection définie par :*

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E,\ \forall i \in I,\ x \in F_i\}$$

3. *Si $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille* **finie** *de fermés de E il en est de même de leur réunion définie par :*

$$\bigcup_{1\leq i\leq n} F_i = \{x \in E,\ \forall i \in [|1, n|],\ x \in F_i\}$$

Exercice 6. Prouver que les intervalles "fermés" de $\mathbf{R}$ sont fermés. Quelle propriété des suites cela traduit-t-il ?

Exercice 7. Soit (E, N) un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, non nécéssairement de dimension finie. Prouver qu'un sous espace F, de dimension finie de E est fermé *(On pourra utiliser les suites de Cauchy).*

Définition 2 (Points adhérents). On dit qu'un point $x \in E$ est adhérent à une partie $A \subset E$ si elle possède l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. x est limite d'une suite de points de A.
2. Toute boule ouverte centrée en x rencontre A

Démonstration. Supposons la propriété 1 satisfaite. On peut écrire $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ où les a_n appartiennent à A. Soit $r > 0$, il existe un rang N tel que :

$$n > N \Rightarrow \mathrm{d}(a_n, x) < r$$

Donc, si $n > N$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ puisqu'il contient a_n.
Réciproquement : Supposons la propriété 2 vérifiée. On choisit $r_n = \frac{1}{n+1}$ $B(x, r_n) \cap A \neq \emptyset$ par hypothèse. On choisit un point de cet ensemble, noté a_n. La suite (a_n) est une suite de points de A qui tend vers x puisque, pour tout n, $\mathrm{d}(x, a_n) < r_n \to 0$. □

Proposition 6. *Tout point adhérent à un fermé F appartient à F.*

Démonstration. Si x est adhérent à F, il est limite d'une suite de points de F, il appartient donc à F puisque celui-ci est fermé. □

Proposition 7. *Soit A une partie de $\mathbf{R}$ non vide et majorée, alors $\sup A$ est adhérent à A. En particulier, si A est fermé, il contient sa borne supérieure. Résultats analogues avec la borne inférieure d'une partie non vide et minorée.*

Démonstration. On sait que A admet une borne supérieure M. Si $n \in \mathbf{N}$, $x_n = M - \frac{1}{n+1} < M$ ne majore plus A donc il existe un $a_n \in A$ tel que $a_n > x_n$. Comme $x_n < a_n \leq M$, la suite (a_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x qui est donc adhérent à A. La proposition précédente permet d'établir que si A est fermé, non vide, majoré, $\sup A \in A$. □

Exercice 8. On appelle *adhérence* de A l'ensemble de ses points adhérents [2].

1. Prouver que c'est un fermé qui contient A.
2. Prouver que tout fermé qui contient A contient son adhérence.
3. Caractériser les fermés à l'aide de cette notion.
4. Déterminer l'adhérence d'une boule ouverte.
5. Déterminer l'adhérence de

$$U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ xy > 1\}$$

1.3 Compacts

Définition 3. Une partie $K \subset E$ est dite compacte si elle possède l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. K est fermée et bornée.

[2] définition hors programme mais quand même utilisée à certains concours

2. De toute suite d'éléments de K on peut extraire une suite qui converge **ver un élément de** K**.** (Propriété de Bolzano-Weierstrass)

Démonstration. Supposons la propriété 1 satisfaite. Soit (x_n) une suite d'éléments de K. Comme K est bornée, la suite (x_n) aussi et on peut en extraire une suite convergente $(x_{\phi(n)})$. Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_{\phi(n)}$, x est limite d'une suite d'éléments de K qui est, par hypothèse, fermé donc $x \in K$.
Réciproquement : Supposons satisfaite la propriété de Bolzano-Weierstrass. Prouvons d'abord que K est fermé. Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de K. Posons $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. On peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $y \in K$. Or la suite $(x_{\phi(n)})$ est une sous suite de la suite (x_n) qui converge vers x, elle converge donc aussi vers x. L'unicité de la limite de la suite $(x_{\phi(n)})$ assure $x = y \in K$.
Prouvons maintenant que K est borné. S'il ne l'était pas, il existerait une suite (x_n) d'éléments de K telle que $N(x_n) > n$ pour tout n. Pour toute extraction ϕ, il viendrait $N(x_{\phi(n)}) > \phi(n) \geq n$; on ne saurait donc extraire de $(x_{\phi(n)})$ une suite convergente puisque la suite $N(x_{\phi(n)})$ tend vers $+\infty$. □

Exemple 2. Les points de E, les parties finies, les segments de $\mathbf{R}$, les boules fermées, les sphères, les réunion finies de compacts *etc.* sont des compacts.

Exercice 9. Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de E. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ prouver que l'ensemble :

$$\{x_n,\, n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$$

est compact.

Exercice 10. Soit F un fermé et K un compact non vides, prouver que $F + K$ est fermé. Montrer, *via* un contre-exemple que c'est faux si on suppose simplement K fermé.

Proposition 8. *Les compacts non vides de* $\mathbf{R}$ *ont un plus grand et un plus petit élément.*

Démonstration. En effet un tel compact possède une borne supérieure et une borne inférieure puisqu'il est non vide et borné. Il contient ces bornes car il est fermé. □

Enfin, pour mémoire, une définition et un résultat déja vus en exercice dans la première partie de ce cours, **hors programme** mais utiles dans beaucoup de situations théoriques. *[cf plus loin les les exercices 22 et 32.]*

Proposition 9. *On appelle valeur d'adhérence d'une suite* (x_n) *d'éléments d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé* E *de dimension finie tout élément* x *de* E *tel qu'existe une sous suite* $(x_{\phi(n)})$ *de* (x_n) *qui converge vers* x*. Si une suite* **bornée** *de* E *ne possède qu'une valeur d'adhérence elle converge vers icelle.*

Démonstration. Soit x cette unique valeur d'adhérence. Supposons que (x_n) ne converge pas vers x, alors :

$$\exists \epsilon > 0 \;/\; \forall N \in \mathbf{N},\; \exists n > N \;/\; N(x_n - x) \geq \epsilon$$

On construit alors par récurrence une sous suite $(x_{\theta(n)})$ de (x_n) telle que, pour tout n, $N(x_{\theta(n)} - x) \geq \epsilon$. D'après Bolzano-Weierstrass, on peut réextraire de la suite $(x_{\theta(n)})$ une suite $(x_{\theta\circ\sigma(n)})$ qui converge vers y tel que $N(y - x) \geq \epsilon$. y serait une valeur d'adhérence de (x_n) distincte de x ce qui n'est pas. □

2 Etude locale d'une application

On dira qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie est vraie *au voisinage d'un point* a si elle est vraie :

- Sur l'intersection avec A d'une boule de centre a lorsque a est un point de E adhérent à A.
- Sur l'intersection avec A d'un intervalle de la forme $]c, +\infty[$ lorque $E = \mathbf{R}$ et $a = +\infty$.
- Sur l'intersection avec A d'un intervalle de la forme $]-\infty, c[$ lorque $E = \mathbf{R}$ et $a = -\infty$.

2.1 Limite en un point, continuité en un point

Définition 4 (Limite en un point). Soit f une application d'une partie A de E, à valeurs dans F et a un point de E **adhérent à** A. Etant donné un élément b de f, on dit que f admet b comme limite au point a si :

$$\forall \epsilon > 0,\; \exists \delta > 0,\; \forall x \in A,\; ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Si un tel b existe, il est unique, on dit que f admet une limite au point a et on note :

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{ou bien} \qquad b = \lim_{a} f$$

Démonstration. Prouvons l'unicité de b. Supposons que b et b' satisfassent aux propriétés ci-dessus. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tels que :

$$(1) \quad \forall x \in A,\ ||x-a|| < \delta \Rightarrow ||f(x)-b|| < \frac{\epsilon}{2}$$

et :

$$(1') \quad \forall x \in A,\ ||x-a|| < \delta' \Rightarrow ||f(x)-b'|| < \frac{\epsilon}{2}$$

Soit $\delta" = \min(\delta,\delta') > 0$. **comme a est adhérent à** A, la boule $B(a,\delta")$ rencontre A. On peut donc choisir un x dans $B(a,\delta")\cap A$; pour un tel x, les deuxièmes membres de (1) et (1′) sont simultanément vérifiés donc :

$$||b-b'|| \leq ||b-f(x)|| + ||f(x)-b'|| < \epsilon$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il vient $||b'-b|| < \epsilon$, ce qui impose $b' = b$. □

Remarque 3. **Le fait que a soit adhérent à A est essentiel dans l'unicité de la limite. C'est faux sinon**

Remarque 4. L'existence et la valeur de la limite ne dépendent pas de la norme en dimension finie.

Remarque 5. Les inégalités autres que $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ peuvent être élargies.

Remarque 6. Si N est une norme quelconque sur E, $\lim\limits_0 N(x) = 0$.

Définition 5. On dit que $+\infty$ *(resp* $-\infty$*)* est adhérent à une partie A de $\mathbf{R}$ si et seulement si pour tout $c \in \mathbf{R}$, $A\cap]c,+\infty[\neq \emptyset$ *(resp* $A\cap]-\infty,c[\neq\emptyset$*)*.

Définition 6 (Limite en $\pm\infty$). Soit f une application d'une partie A de $\mathbf{R}$, à valeurs dans F. On suppose que $+\infty$ **est adhérent à** A. Etant donné un élément b de f, on dit que f admet b comme limite au point $+\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda,\ \forall x \in A,\ x > \lambda \Rightarrow ||f(x)-b|| < \epsilon$$

Si un tel b existe, il est unique, on dit que f admet une limite au point $+\infty$ et on note :

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{ou bien} \qquad b = \lim_{+\infty} f$$

Définition analogue en $-\infty$.

Définition 7 (Limite infinie des fonctions à valeurs réelles). Soit f une application d'une partie A de E, à valeurs dans $\mathbf{R}$ et a un point de E **adhérent à** A. On dit que f admet $+\infty$ *(resp* $-\infty$*)* comme limite au point a si :

$$\forall \mu \in \mathbf{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ ||x-a|| < \delta \Rightarrow f(x) > \mu \qquad (resp\ f(x) < \mu)$$

On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou bien} \qquad \lim_{a} f = +\infty$$

(resp $-\infty$*)*

Définition 8 (Continuité locale). Soit f une application d'une partie A de E, à valeurs dans F et a un point **appartenant à** A. On dit que f est <u>continue</u> au point a si et seulement si elle admet une limite en ce point ; cette limite vaut nécessairement $f(a)$.

Démonstration. Si $a \in A$, a est, en particulier, adhérent à A. Supposons que f ait une limite b au point a et soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in B(a,\delta)\cap A,\ ||f(x)-b|| < \epsilon$$

Si on prend $x = a \in B(a,\delta)\cap A$, il vient $||f(a)-b|| < \epsilon$. Comme c'est vérifié pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit $b = f(a)$. □

Exemple 3. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de E et (π_i) le système des formes coordonnées dans la base E. On a vu qu'il existait $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ |\pi_i(x)| \leq k\,||x||$$

Soit $i \in \{1,\ldots,p\}$; pour x, y dans E :

$$|\pi_i(y) - \pi_i(x)| \leq ||y-x||$$

Ce qui prouve la continuité de π_i en tout point de E.

Proposition 10 (Prolongement par continuité en un point). *Soit f une application d'une partie $B \subset E$ dans F. Soit a un point de E, adhérent à B mais n'appartenant pas à B. Une condition nécessaire pour que f admette un prolongement à $A = B\cup\{a\}$, continu en a est que f admette une limite en a. Le prolongement par continuité de f en a est alors unique.*

2.2 Propriétés

2.2.1 Signe d'une fonction à valeurs réelles admettant une limite non nulle

Proposition 11. *Soit f une application de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$, a un point adhérent à A. On suppose que $\lim_a f = b \in]0, +\infty]$. Alors f est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a.*

Démonstration. **Faire la preuve dans le cas $E = \mathbf{R}$ avec un dessin**. Posons $c = b/2$ si $b \in \mathbf{R}$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in A \cap B(a, \delta)$ on ait $|f(x) - b| < b/2$ d'où $b/2 < f(x) < 3b/2$. Les lecteurs traiteront le cas $b = +\infty$. □

Remarque 7. S'étend sans changement lorsque $E = \mathbf{R}$, $a = \pm\infty$.

2.2.2 Caractérisation séquentielle

Proposition 12. *Soit f une application de $A \subset E$ dans F, a un point adhérent à A, b un élément de F. Une condition nécessaire et suffisante pour que f ait pour limite b au point a est que pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))$ converge vers b.*

Démonstration. Supposons d'abord $\lim_a f = b$ et soit (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \cap B(x, \delta),\ ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Comme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$n > n_0 \Rightarrow ||a_n - a|| < \delta$$

donc, pour $n > n_0$, $||f(a_n) - b|| < \epsilon$. La suite $(f(a_n))$ converge donc vers b.
Réciproquement : Prouvons plutôt la contraposée de la réciproque. Supposons que f n'ait pas b comme limite au point a. Cela se traduit par :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in A,\ ||x - a|| < \delta \text{ et } ||f(x) - b|| \geq \epsilon$$

En choisissant $\delta_n = \frac{1}{n+1}$, on met ainsi en évidence un $a_n \in A$ tel que $||a_n - a|| < \delta_n$ et $||f(a_n) - b|| \geq \epsilon$. La suite (a_n) converge donc vers a alors que la suite $(f(a_n))$ ne peut converger vers b. □

Remarque 8. Les lecteurs étendront ce résultat au cas des limites infinies au départ ou à l'arrivée et formuleront la caractérisation séquentielle de la continuité d'une application en un point.

Exercice 11. Avec les notations précédentes, prouver que $\lim_a f$ est un point adhérent à $f(A)$.

Exercice 12. La fonction f définie pour $x \neq y$ par :

$$f(x, y) = \frac{\mathrm{sh}(x) - \sin y}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}$$

admet-t-elle une limite en $(0, 0)$?

2.2.3 Propriétés d'encadrement

Proposition 13 (Convergence par encadrement). *Soient f, g, h trois applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un point de E adhérent à A. On suppose que :*

- *Au voisinage de a on ait : $g \leq f \leq h$.*
- $\lim_a g = \lim_a h = b \in \mathbf{R}$

Alors f admet au point a une limite égale à b.
En particulier si $f : A \to F$, $l \in F$ et $||f(x) - l|| \leq g$ au voisinage de a où g est une application de A dans $\mathbf{R}$, de limite nulle en a, alors f admet au point a une limite égale à l.

Démonstration. Il existe un $r > 0$ tel que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur $A \cap B(a, r)$. Soit (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a. A partir d'un certain rang n_0, on a :

$$a_n \in A \cap B(a, r) \quad \text{donc} \quad g(a_n) \leq f(a_n) \leq h(a_n)$$

D'après le théorème de convergence par encadrement pour les suites, il vient $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$. Le résultat découle de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Exemple 4. $E = \mathbf{R}^2$ muni d'une norme, $A = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Soit f l'application de A dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

En utilisant les coordonnées polaires, il vient, pour $(x, y) \in A$:

$$|f(x,y)| \leq 2\,||(x,y)||_2$$

Donc $\lim\limits_{(0,0)} f = 0$.

Exercice 13. Reprendre le précédent avec

$$f(x,y) = \frac{y^3}{x^2 + |y|^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

Proposition 14. *Soient f et g deux applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un point de E adhérent à A. On suppose que :*

- *Au voisinage de a on ait : $g \leq f$.*
- $\lim\limits_a g = +\infty$

Alors f admet au point a une limite égale à $+\infty$.

Démonstration. Démonstration analogue à la précédente. □

Proposition 15 (Passage d'inégalités à la limite). *Soient f et g deux applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un point de E adhérent à A. On suppose que :*

- *Au voisinage de a on ait : $g \leq f$.*
- *f et g admettent, au point a, des limites l et l' appartenant à $\overline{\mathbf{R}}$.*

Alors $l \leq l'$.

Démonstration. Soit (a_n) une suite de points de A qui converge vers a, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = l'$ et, à partir d'un certain rang $f(a_n) \leq g(a_n)$. On en déduit $l \leq l'$ en vertu du passage de l'inégalité à la limite pour les suites réelles. □

Remarque 9. On étendra ces résultats au cas où l'espace de départ est $\mathbf{R}$ et $a = \pm\infty$.

2.2.4 Composition des limites

Proposition 16. *Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit A une partie de E, B une partie de F. Soit a un point de E adhérent à A et b un point de F adhérent à B. On considère une application $f : A \to F$ et une application $g : B \to G$. On suppose que :*

- *$f(A) \subset B$.*
- *$\lim\limits_a f = b$ et $\lim\limits_b g = c \in G$.*

Alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$$

Démonstration. Soit (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))$ est une suite d'éléments de $f(A) \subset B$ qui converge vers b. La suite de terme général $g(f(a_n))$ converge donc vers c. On en déduit $\lim\limits_a g \circ f = c$ en vertu de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Remarque 10. Les lecteurs étendront ce résultat au cas où certaines de ces limites sont infinies.

2.2.5 Opérations algébriques sur les limites

Proposition 17 (Somme). *Soit f et g deux applications de $A \subset E$ dans F. Soit a un point de E adhérent à A. On suppose que :*

$$\lim_a f = l \qquad \textit{et} \qquad \lim_a g = l'$$

alors $f + g$ admet au point a une limite égale à $l + l'$.

Démonstration. Soit (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))$ tend vers l, la suite $(g(a_n))$ tend vers l' donc $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)+g(a_n) = l + l'$ et le résultat grace à la caractérisation séquentielle de la limite. □

Proposition 18 (Cas d'une limite infinie). *Soit f et g deux applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un point de E adhérent à A. On suppose que :*

$$\lim_a f = +\infty \qquad \textit{et } g \textit{ minorée au voisinage de } a$$

alors la fonction $f + g$ admet au point a la limite $+\infty$. Résultat analogue en remplaçant "minorée" par "majorée" et $+\infty$ par $-\infty$.

Démonstration. On reprend les termes de la preuve précédente en remarquant qu'il existe $r > 0$ telle que g soit minorée sur $A \cap B(a, r)$. A partir d'un cetain rang n_0, $a_n \in A \cap B(a, r)$ donc la suite $(g(a_n))_{n \geq n_0}$ est minorée d'où $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) + g(a_n) = +\infty$. □

Proposition 19 (Produit par une fonction scalaire). *Soit f une applications de $A \subset E$ dans F et λ une application de A dans $\mathbf{K}$. Soit a un point de E adhérent à A. On suppose que :*

$$\lim_a f = l \qquad et \qquad \lim_a \lambda = \alpha$$

alors l'application λf admet au point a une limite égale à αl.

Démonstration. Même preuve à l'aide de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Proposition 20 (Cas d'une limite infinie). *Soit f et g deux applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un point de E adhérent à A. On suppose que :*

$$\lim_a f = +\infty$$

et que g est minorée par une constante strictement positive au voisinage de a (c'est le cas, en particulier lorsque $\lim_a g = l \in]0, +\infty]$). alors la fonction fg admet au point a la limite $+\infty$.
Résultat analogue en remplaçant "minorée" par "majorée", $+\infty$ par $-\infty$ et "positive" par "négative".

Démonstration. Analogue aux précédentes. □

Proposition 21 (Inverse d'une fonction scalaire). *Soit f une application de $A \subset E$ dans $\mathbf{K}$. Soit a un point de E adhérent à A. On suppose que f ne s'annule pas sur A et que $\lim_a f = b$ avec $b \in \mathbf{K}$ ou $b \in \overline{\mathbf{R}}$ si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.*
Alors :
- *Si $b \neq 0$, $1/f$ admet, au point a, la limite $1/b$.*
- *Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $b = 0$ et $f > 0$ (resp < 0) au voisinage de a, $1/f$ admet, au point a, la limite $+\infty$ (resp $-\infty$).*
- *Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $b = \pm\infty$, $1/f$ admet, au point a, la limite 0.*

Démonstration. Analogue aux précédentes. □

Proposition 22 (Passage aux coordonnées). *Soit f une application de $A \subset E$ dans F et a un point de E adhérent à A. Soit $(e) = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F et $(\pi_i)_{1 \leq i \leq p}$ le système des formes coordonnées associées. Posons $f_i = \pi_i \circ f$, de sorte que, pour $x \in E$:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, e_i$$

Soit $b = \sum_{i=1}^{p} b_i\, e_i$ un vecteur de E. Alors $\lim_a f(x) = b$ si et seulement si, pour tout $i \in [|1, p|]$, $\lim_a f_i(x) = b_i$

Démonstration. Si $\lim_a f(x) = b$. On sait que π_i est continue en b ; d'après le théorème de composition des limites, il vient :

$$\lim f_i(x) = \pi_i(b) = b_i$$

Réciproquement : Si, pour tout $i \in [|1, p|]$, on a $\lim f_i(x) = b_i$, alors la fonction $f = \sum_{i=1}^{p} f_i\, e_i$ admet pour limite au point a $\sum_{i=1}^{p} b_i\, e_i = b$ en vertu des propriétés opératoires ci-dessus. □

Remarque 11. Il en résulte qu'on peut toujours ramener l'étude du comportement, au voisinage d'un point, d'une application à valeurs dans F à celle de fonctions à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Remarque 12. Les lecteurs étendront tous ces résultats au cas où l'espace de départ est $\mathbf{R}$ et $a = \pm\infty$.

2.2.6 Restrictions et prolongements

Proposition 23 (Restriction). *Soit f une application de $A \subset E$ dans F. Soit $B \subset A$ et a un point de E adhérent à B. Alors a est adhérent à A et si $\lim_a f = b \in F$ alors $\lim_a f_{|B} = b$. La réciproque est fausse en général*

Démonstration. Immédiat avec les caractérisations séquentielle des points adhérents et des limites. Un contre exemple à la réciproque est donné par : $A = \mathbf{R}$, $B = [0, +\infty[$, $a = 0$, f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Exemple 5. On va donner un exemple d'application f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ qui tend vers 0 dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais qui ne tend pas vers 0 en $(0, 0)$. Posons :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit D une droite passant par $(0,0)$ et $g = f_{|D}$ alors :

$$\lim_{(0,0)} g = 0$$

Cependant f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Démonstration. Si D est l'axe Oy, g est la fonction nulle et le résultat est clair. Sinon, soit θ l'angle que fait D avec Ox, un passage en polaire donne, si $\rho \neq 0$:

$$g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho\frac{\sin^2\theta}{2\,\cos\theta}$$

Donc, pour tout réel ρ :

$$|g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \frac{\sin^2\theta}{2\,|\cos\theta|}|\rho|$$

D'où, en revenant aux coordonnées usuelles :

$$\forall (x,y) \in D,\ |g(x,y)| \leq \frac{\sin^2\theta}{2\,|\cos\theta|}||(x,y)||_2$$

Le théorème de convergence par encadrement assure alors que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

Les lecteurs prouveront que f ne tend pas vers 0 en $(0,0)$. □

Proposition 24 (Limite suivant une réunion). *Soit f une application de $A \subset E$ dans F. On suppose $A = B \cup C$ et soit a un point adhérent à B et à C. Si les fonctions $f_{|B}$ et $f_{|C}$ ont pour limite b au point a, il en est de même de f.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$(1) \quad \forall x \in B,\ ||x - a|| < \alpha \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$$

$$(2) \quad \forall x \in C,\ ||x - a|| < \beta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Soit $\delta = \min(\alpha, \beta) > 0$ et $x \in A \cap B(a, \delta)$. Si $x \in B$, (1) entraine $||f(x) - b|| < \epsilon$, si $x \in C$, (2) fournit la même conclusion donc $\lim_a f = b$. □

Exemple 6 (Limites latérales). Soit f une application d'un intervalle réel I dans F, a un point intérieur à I. On dit que f admet b comme limite à gauche au point a si la fonction $f_{|]-\infty,a[\cap I}$ admet b comme limite en a On note :

$$b = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad b = f(a^-) \quad \text{ou} \quad b = f(a-0)$$

Définition analogue pour la limite à droite en a.
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- f admet b comme limite à gauche et à droite au point a.
- La restriction $g = f_{I-\{a\}}$ admet b comme limite au point a.

En particulier f est continue au point a si et seulement si elle admet, au point a, des limites latérales égales à $f(a)$.

Démonstration. Cela résulte des résultats sur la limite d'une restriction et la limite suivant une réunion puisque $I - \{a\} = (I\cap] - \infty, a[) \cup (I\cap]a, +\infty[)$ □

Exercice 14. Soit $a \in U \subset A$ et U ouvert, $f : A \to F$. Prouver l'équivalence de :

- f continue au point a.
- $f_{|U}$ continue au point a.

Prouver que la fonction max : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est continue en tout point de $\mathbf{R}^2$.

3 Aspects globaux de la continuité

Définition 9. Une application $f : A \to F$ est dite continue sur A si elle est continue en tout point de A. Leur ensemble est noté $\mathcal{C}(A, F)$ ou, plus simplement, $\mathcal{C}(A)$ si $F = \mathbf{K}$.

Exemple 7. Les applications lipschitziennes sur A y sont continues. Les formes coordonnées dans une base également.

3.1 Propriétés générales

3.1.1 Composition

Proposition 25. *Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit A une partie de E, B une partie de F. On considère une application $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et une application $g \in \mathcal{C}(B, G)$. On suppose que $f(A) \subset B$ alors $h = g \circ f \in \mathcal{C}(A, G)$.*

Démonstration. Découle du théorème de composition des limites. □

3.1.2 Propriétés algébriques

Proposition 26 (Combinaison linéaire). *Si f et g appartiennent à $\mathcal{C}(A,F)$ et si α et β sont des scalaires, $\alpha f+\beta g\in\mathcal{C}(A,F)$. En particulier $\mathcal{C}(A,F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$.*

Démonstration. Résulte des propriétés opératoires des limites. □

Proposition 27. *Si $\lambda\in\mathcal{C}(A)$ et $f\in\mathcal{C}(A,F)$, $\lambda f\in\mathcal{C}(A,F)$. En particulier $\mathcal{C}(A)$ est une sous algèbre unitaire de $\mathcal{F}(A,\mathbf{K})$.*

Démonstration. Même preuve. □

Proposition 28 (Inverse). *Si $f\in\mathcal{C}(A)$ ne s'annule pas sur A, $1/f\in\mathcal{C}(A)$.*

Démonstration. Preuve identique. □

Proposition 29 (Passage aux coordonnées). *Soit f une application de $A\subset E$ dans F . Soit $(e)=(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de F et $(\pi_i)_{1\leq i\leq p}$ le système des formes coordonnées associées. Posons $f_i=\pi_i\circ f$. Alors $f\in\mathcal{C}(A,F)$ si et seulement si, pour tout $i\in[|1,p|]$, $f_i\in\mathcal{C}(A)$.*

Démonstration. Découle de la caractérisation de la limite d'une fonction par passage aux coordonnées. □

3.1.3 Restrictions, prolongements

Proposition 30. *Soit $f\in\mathcal{C}(A,F)$, $B\subset A$, alors $f_{|B}\in\mathcal{C}(B,F)$. On remarquera, inversement que si f est une application de A dans F telle que $f_{|B}$ soit continue sur B, f n'est pas nécessairement continue en un point $a\in B$.*

Exercice 15. Prouver qu'une fonction k-lipschitzienne de A dans F se prolonge en une fonction k-lipschitzienne sur l'adhérence de A.

3.1.4 Prouver la continuité d'une fonction

cf cours sur l'interversion de symboles

Exemple 8. Etude d'un prolongement continu de la fonction $(x,y)\mapsto x^y$.

Exercice 16. Etudier les points de continuité des fonctions suivantes et si elle peuvent se prolonger par continuité à des domaines plus grand que leur domaine de définition :

$$f(x,y)=\frac{x\sin x+y\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad f(x,y)=\frac{x\sin x+y\sin y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y)=y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f(x,y)=\frac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4}\qquad \alpha>0$$

Exercice 17. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, peut-t-on prolonger la fonction ϕ, définie pour $x\neq y$ par :

$$\phi(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

en une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$?

3.2 Propriétés topologiques

3.2.1 Image réciproque d'ouverts et de fermés

Proposition 31. *Soit $f\in\mathcal{C}(E,\mathbf{K})$, U un ouvert (resp un fermé) de $\mathbf{K}$. L'image réciproque de U par f définie par :*

$$f^{-1}(U)=\{x\in E,\ f(x)\in U\}$$

est un ouvert (resp un fermé) de E. En particulier, si $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, les ensembles suivants sont ouverts dans E :

- $f^{-1}(]\alpha,+\infty[)=\{x\in E,\ f(x)>\alpha\}$
- $f^{-1}(]-\infty,\alpha[)=\{x\in E,\ f(x)<\alpha\}$

Les parties suivantes de E sont des fermés :

- $f^{-1}([\alpha,+\infty[)=\{x\in E,\ f(x)\geq\alpha\}$
- $f^{-1}(]-\infty,\alpha])=\{x\in E,\ f(x)\leq\alpha\}$
- $f^{-1}(\{\alpha\})=\{x\in E,\ f(x)=\alpha\}$

Démonstration. Soit $a\in f^{-1}(U)$ *ie* $f(a)\in U$. Comme U est un ouvert de $\mathbf{K}$, il existe $\epsilon>0$ tel que $B(f(a),\epsilon)\subset U$. Par continuité de f au point a, il existe $\delta>0$ tel que :

$$||x-a||<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon$$

Donc, si $x\in B(a,\delta)$, $f(x)\in B(f(a),\epsilon)\subset U$. Il en résulte que $B(a,\delta)\subset f^{-1}(U)$ qui est donc un ouvert puisque a est quelconque.
Le cas des fermés s'obtient par passage au complémentaire puisque :

$$f^{-1}(\mathbf{K}-F)=E-f^{-1}(F)$$

□

Exemple 9. L'ensemble U des points de $\mathbf{R}^3$ vérifiant :

$$x^3 + 2y^2 - xyz > 0$$

est un ouvert puisque c'est l'image réciproque de $]0, +\infty[$ par l'application continue f de $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 - xyz$.

Remarque 13. **On ne peut rien dire de l'image directe d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue**. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$f(\mathbf{R}) =]0, 1]$ qui n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 18. Prouver que les parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$ (commencer par $E = \mathbf{R}$).

Exercice 19. (ENS) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels ≥ 0. Soient $v_1, \ldots, v_n$ des réels distincts. Pour $z \in \mathbf{C} - \{v_1, \ldots, v_n\}$, on pose :

$$\phi(z) = z + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{z - v_i}$$

1. Montrer que :

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,\phi(z) > 0\}$$

   est un ouvert de $\mathbf{C}$. Déterminer son adhérence $\overline{\Omega}$ *sic.*
2. Montrer que ϕ est injective sur Ω. Est-ce encore vrai sur $\overline{\Omega}$?

3.2.2 Image d'une partie compacte

Proposition 32. *Soit $f \in \mathcal{C}(A, F)$, l'image par f d'une partie compacte incluse dans A est une partie compacte de F.*

Démonstration. Soit $K \subset A$ un compact. Prouvons la compacité de $f(K)$ *via* la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(K)$. Il existe un $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. On peut extraire de la suite

(x_n) une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. Par continuité de f en x, il vient $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(x) \in K$, donc :

$$\lim_{n\to\infty} y_{\phi(n)} = f(x) \in K$$

On a extrait, de toute suite d'éléments de $f(K)$ une suite qui converge vers un élément de $f(K)$ lequel est donc compact. □

Corollaire 1. *Soit f une application continue d'une partie $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Si K est une partie compacte de E incluse dans A, le théorème précédent assure que $f(K)$ est un compact de $\mathbf{R}$ qui a donc un plus grand et un plus petit élément.* **f est donc bornée sur K et y atteint ses bornes**. *Ce résultat généralise celui déja vu pour les fonctions à valeurs réelles continues sur un segment.*

Exercice 20. Soit f une application d'une partie $A \subset E$ dans un EVN F. On suppose que pour tout compact $K \subset A$, $f_{|K}$ est continue sur K. Montrer que f est continue sur A.

Exercice 21. -

1. Soit F un sous espace de dimension finie d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé E. Prouver l'existence d'un vecteur unitaire $u \in E$ tel que :

$$\forall x \in F,\ ||x - u|| \geq 1$$

2. (Mines 2000) On suppose que la sphère unité d'un $\mathbf{R}$-espace de dimension n est recouvert par n boules fermées. Montrer qu'une de ces boules contient 0.

Exercice 22. Pour $d \in \mathbf{N}^*$, on note E_d l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbf{K}[X]$ dont le degré vaut d. Si $P \in \mathbf{K}[X]$, $P = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n X^n$, on pose :

$$||P|| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

1. Justifier cette définition et prouver que c'est une norme.
2. Montrer que E_d est fermé dans $(\mathbf{K}[X],\ ||\ \ ||)$.
3. Soit $P \in E_d$, montrer que toute racine z de P vérifie $|z| \leq ||P||$.
4. Soit (P_n) une suite d'éléments de E_d qui converge vers P et pour chaque entier n une racine z_n de P_n. Notons Z l'ensemble des racines de P. Que dire des valeurs d'adhérence de la suite (z_n). Montrer que $\mathrm{d}(z_n, Z) \to 0$. En déduire, en utilisant la proposition 9, que, si la suite $(z_{n+1} - z_n)$ tend vers 0 alors la suite (z_n) converge.

3.2.3 Théorème de HEINE

cf cours

4 Continuité des applications linéaires et bilinéaires

4.1 Etude des applications linéaires

Proposition 33. *Toute application linéaire u d'un espace vectoriel normé (E, N) de dimension finie, dans un autre (F, N') est continue.*

Démonstration. Soit $(e) = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(\pi_1, \dots, \pi_p)$ la famille des formes coordonnées correspondantes. On a vu que les π_i étaient continues (elles sont lipschitziennes). Si $x \in E$, il s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(x)\, e_i$$

donc

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(x)\, u(e_i)$$

D'où :

$$u = \sum_{i=1}^{p} \pi_i\, u(e_i)$$

qui est continue d'après les théorèmes opératoires sur les applications continues. □

Proposition 34. *Avec les notations de la proposition précédente, il existe $k > 0$ tel que :*

$$\forall x \in E,\ N'(u(x)) \leq k\, N(x)$$

En particulier, u est k-lipschitzienne.

Démonstration. L'ensemble $K = B_F(0,1)$ est compact dans E car il est fermé et borné. La fonction $x \mapsto N'(u(x))$ est continue sur K comme composée d'applications qui le sont, elle est donc bornée sur K. Il existe donc $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in B_F(0,1),\ N'(u(x)) \leq k$$

De l'homogénéité de la norme N on déduit l'inégalité voulue. Le caractère k-lipschitzien de u s'obtient en appliquant cette inégalité au vecteur $x - y$. □

Exercice 23. $(E, ||\ \ ||)$ est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel normé de dimension p. Soit $(e) = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E. Démontrer que l'application N définie sur $\mathcal{L}(E)$ par :

$$u \mapsto \sum_{i=1}^{p} ||u(e_i)||$$

Est une norme.
Démontrer qu'une suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ tend vers $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x)$. Etablir un résultat analogue pour les suites de matrices.

Exercice 24. Soit E un sous espace de $\mathcal{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ stable par la dérivation D. On suppose que pour toute suite (f_n) d'éléments de E qui tend uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}$, il en est de même de la suite $(\mathrm{D}\, f_n)$.

1. Montrer qu'existe $C > 0$ telle que :

$$\forall f \in E,\ ||\mathrm{D}\, f||_\infty \leq C\, ||f||_\infty$$

2. Montrer que E est de dimension finie et possède une base constituée de fonctions de la forme : $x \mapsto \mathrm{e}^{nix}$.

Exercice 25 (Norme subordonnée). Soit $(E, ||\ \ ||)$ un $\mathbf{K}$-EV de dimension finie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose :

$$|||u||| = \sup_{||x=1||} ||u(x)|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||u(x)||}{||x||}$$

1. Justifier cette définition et cette inégalité.
2. Prouver que $|||\ \ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ qu'on appelle *norme subordonnée à la norme $||\ \ ||$*.
3. Prouver que, pour u et $v \in \mathcal{L}(E)$, $||u \circ v|| \leq ||u||\, ||v||$. Calculer $|||\mathrm{Id}|||$.
4. On suppose que la norme de E est euclidienne ; que vaut $|||u|||$ en terme de spectre ?
5. On prend $E = \mathbf{K}^n$ muni de $||\ \ ||_\infty$. On identifie une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ qui lui est canoniquement associé. Exprimer $|||A|||$ à l'aide des coefficients de A.

6. Prouver que la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $N(A) = n \max |a_{ij}|$ n'est subordonnée à aucune norme sur $\mathbf{R}^n$.

Exemple 10 (Etude du groupe linéaire). On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'une norme d'algèbre. On a les propriétés suivantes :

1. L'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
3. L'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue en I_n puis sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 26. On muni $\mathbf{K}_n[X]$ d'une norme. Démontrer, en utilisant la continuité du déterminant et les polynômes d'interpolation de Lagrange que l'application $A \mapsto \chi_A$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}_n[X]$. En déduire qu'une $\mathbf{K}$-matrice A est nilpotente si et seulement s'il existe une suite (A_n) de matrices semblables à A qui tend vers 0.

Exercice 27. (ENS) Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\exists k > 0,\ \exists \alpha \in]0,1[,\ \forall y \in B_F(0,1)\ \exists x \in B_F(0,k),\ ||y - f(x)|| < \alpha$$

Montrer que f est surjective.

4.2 Etude des applications bilinéaires

Définition 10 (Norme produit). Soient (E, N) et (E', N') deux $\mathbf{K}$-EVN. On peut définir une norme $N"$ sur l'espace vectoriel $E \times E'$ par :

$$N"(x, x') = N(x) + N(x')$$

Démonstration. Les lecteurs vérifieront que c'est bien une norme. □

Proposition 35. *Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-EVN de dimension finie. Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Alors B est continue sur $E \times F$. De plus, il existe $k > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ ||B(x, y)|| \leq k\, ||x||\, ||y||$$

Démonstration. Analogue à celle faite pour les applications linéaires : Soit $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(f) = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F, (π_i) et (Π_j) les systèmes de formes coordonnées dans ces bases.

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \pi_i(x) \Pi_j(y)\, B(e_i, f_j)$$

Les applications $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont linéaires donc continues sur $E \times F$, il en est donc de même de $(x, y) \mapsto \pi_i(x)\Pi_j(y)$ et donc de B. L'inégalité s'obtient en majorant $||B(x, y)||$ sur $B_F(0,1) \times B_F(0,1)$ qui est un compact de $E \times F$. □

Exemple 11. Les applications bilinéaires suivantes sont donc continues :

– L'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbf{K} \times E$ dans E.
– L'application $(u, v) \mapsto u \circ v$ de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.
– L'application $(A, B) \mapsto AB$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
– Si E est euclidien : Le produit scalaire : $E \times E \to E$.
– Si E est euclidien de dimension 3 et orienté : Le produit vectoriel : $E \times E \to E$.

Exercice 28. (Mines 98) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{K}$, prouver que l'ensemble des couples (x, y) de vecteurs libres forme un ouvert de $E \times E$. Généralisation ?

Exercice 29. Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver l'existence de :

$$N(A) = \sup_{U \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})} |\operatorname{Tr}(AU)|$$

et prouver que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer $N(A)$ lorsque $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ puis lorsque A est quelconque (utiliser la décomposition polaire).

Exercice 30. Prouver que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut être approchée par une suite de matrices inversibles. En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut s'écrire sous la forme QS où $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Généraliser aussi la décomposition QR.

Exercice 31. Soit G un sous groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. On suppose que l'ensemble des réels $\operatorname{Tr}(M)$ où $M \in$ G est fini. Prouver que G est fini.

Exercice 32. Prouver que l'application de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^n$ qui associe à une matrice M le système de ses valeurs propres ordonnées en décroissant est continue.

Table des matières